Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Международная федерация информационных процессов (IFIP)

INTERNATIONAL CONFERENCE

DYNAMICAL SYSTEMS: INVERSE PROBLEMS, STABILITY, AND CONTROL PROCESSES

dedicated to the 80th birthday of Academician Yu.S. Osipov

Moscow, September 22–23, 2016

ABSTRACTS

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ, УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

посвященная восьмидесятилетию академика Ю.С. Осипова

Москва, 22–23 сентября 2016 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Москва 2016

УДК 519.7
ББК 22.18
М43

М43 Международная конференция “Динамические системы: обратные задачи, устойчивость и процессы управления”, посвященная восьмидесятилетию академика Ю.С. Осипова, Москва, 22–23 сентября 2016 г.: Тезисы докладов. — М.: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2016. — 103 с.
ISBN 978-5-98419-071-8

Программный комитет:

Козлов В.В. (*председатель*), Григоренко Н.Л. (*зам. председателя*), Максимов В.И. (*зам.председателя*), Потапов М.М. (*секретарь*), Зеликин М.И., Куржанский А.Б., Ледяев Ю.С., Лукоянов Н.Ю., Садовничий В.А., Тихомиров В.М., Ченцов А.Г.

Организационный комитет:

Моисеев Е.И. (*председатель*), Асеев С.М. (*зам. председателя*), Григоренко Н.Л. (*зам. председателя*), Самсонов С.П. (*секретарь*), Артемьева Л.А., Бесов К.О., Мальцев А.А., Разгулин А.В., Ровенская Е.А., Смирнов А.И., Тимофеева В.А.

Ответственный за выпуск *Смирнов А.И.*

Конференция проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-20645).

ISBN 978-5-98419-071-8

© Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

THE UNIFIED MAXIMUM PRINCIPLE FOR INFINITE-HORIZON OPTIMAL CONTROL PROBLEMS IN ECONOMICS

Aseev S.

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria

aseev@mi.ras.ru

The following problem (P) arise in many fields of economics, in particular in growth theory (see [1]):

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^\infty f^0(t, x(t), u(t))\, dt \to \max,$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in U(t).$$

Here $x(t) \in \mathbb{R}^n$ and $u(t) \in \mathbb{R}^m$ are values of the state and the control vectors at time $t \geqslant 0$, respectively, $x_0 \in G$ where G is an open convex set in $\mathbb{R}^n$ and $U\colon [0,\infty) \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ is a multivalued mapping with nonempty values.

Assume that for a.e. $t \in [0,\infty)$ the derivatives $f_x(t,x,u)$ and $f^0_x(t,x,u)$ exist for all $(x,u) \in G \times \mathbb{R}^m$, and the functions $f(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f^0(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f_x(\cdot,\cdot,\cdot)$, and $f^0_x(\cdot,\cdot,\cdot)$ are Lebesgue-Borel (LB) measurable in (t,u) for every $x \in G$, and continuous in x for almost every $t \in [0,\infty)$ and every $u \in \mathbb{R}^m$. The multivalued mapping $U(\cdot)$ is also assumed to be LB-measurable, i.e. the set $\operatorname{gr} U(\cdot) = \{(t,u) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^m \colon u \in U(t)\}$ is a LB-measurable subset in $[0,\infty) \times \mathbb{R}^m$.

By definition, $(x(\cdot), u(\cdot))$ is an *admissible pair* in problem (P) if $u(\cdot)$ is a Lebesgue measurable function satisfying $u(t) \in U(t)$ for all $t \geqslant 0$, $x(\cdot)$ is the corresponding to $u(\cdot)$ (Charatheodory) trajectory on $[0,\infty)$ in G, and the function $t \mapsto f^0(t, x(t), u(t))$ is locally integrable on $[0,\infty)$. An admissible pair $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ is *weakly overtaking optimal* in problem (P) if $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ converges and for any other admissible pair $(x(\cdot), u(\cdot))$ the following inequality holds:

$$J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \geqslant \liminf_{T\to\infty} \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))\, dt.$$

The following regularity and growth conditions on admissible pair $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ are essential for establishing the normal form versions of the maximum principle with explicitly specified adjoint variable (see [3]).

$(A1)$ *There exists a continuous function* $\gamma\colon [0,\infty) \mapsto (0,\infty)$ *and a locally integrable function* $\varphi\colon [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ *such that* $\{x\colon \|x - x_*(t)\| \leqslant \gamma(t)\} \subset G$ *for all* $t \in [0,\infty)$ *and*

$$\max_{\{x\colon \|x-x_*(t)\|\leqslant\gamma(t)\}} \Big\{ \|f_x(t,x,u_*(t))\| + \|f_x^0(t,x,u_*(t))\| \Big\} \overset{a.e.}{\leqslant} \varphi(t).$$

$(A2)$ *There exists a number* $\beta > 0$ *and a nonnegative integrable function* $\lambda : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ *such that for all* $\zeta \in G$*, satisfying the inequality* $\|\zeta - x_0\| < \beta$*, the initial value problem* $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t))$*,* $x(0) = \zeta$ *has a solution* $x(\zeta;\cdot)$ *on* $[0,\infty)$ *in* G *and*

$$\max_{x\in[x(\zeta;t),x_*(t)]} \Big| \langle f_x^0(t,x,u_*(t)), x(\zeta;t) - x_*(t) \rangle \Big| \overset{a.e.}{\leqslant} \|\zeta - x_0\|\lambda(t).$$

If $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ is an admissible pair satisfying conditions $(A1)$ and $(A2)$ then the fundamental matrix solution $Z_*(\cdot)$ of the linear system

$$\dot{z}(t) = -\left[f_x(t, x_*(t), u_*(t))\right]^* z(t), \quad t \geqslant 0,$$

with initial condition $Z_*(0) = I$ where I is the identity matrix is well defined on $[0,\infty)$.

Let $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ be an admissible pair that satisfies $(A1)$ and $(A2)$, and such that $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ is finite. Then without loss of generality one can assume that there is a neighborhood $\Omega \subset [0,\infty) \times G$ of the set $\operatorname{gr} x_*(\cdot) = \{(t, x_*(t))\colon t \geqslant 0\}$, such that for all $(t,\zeta) \in \Omega$ there is a solution $x(\zeta, t; \cdot)$ of the Cauchy problem

$$\dot{x}(s) = f(s, x(s), u_*(s)), \qquad x(t) = \zeta,$$

on $[0,\infty)$ in G, and for all $(t,\zeta) \in \Omega$ the integral

$$W(t,\zeta) = \int_t^\infty f^0(s, x(\zeta,t;s), u_*(s))\, ds$$

converges. Notice, that the meaning of $W(t,\zeta)$ is the conditional value of the capital stock ζ at time t under a given investment plan $u_*(\cdot)$ (see [2]).

Define the normal form Hamilton-Pontryagin function $\mathcal{H} : [0,\infty) \times G \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ for problem (P) in the usual way:

$$\mathcal{H}(t,x,u,\psi) = f^0(t,x,u) + \langle f(t,x,u), \psi \rangle,$$

$$t \geqslant 0,\ x \in G,\ u \in \mathbb{R}^m,\ \psi \in \mathbb{R}^n.$$

The following result unifies the normal form version of the Pontryagin maximum principle for problem (P) developed in [3] with the Hamilton-Jacobi-Bellman equation without any a priory regularity assumptions on the value function (see [2] for details).

Theorem 1. *Let $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ be a weakly overtaking optimal admissible pair in problem (P) that satisfies conditions $(A1)$ and $(A2)$. Then*

(i) the partial (Fréchet) derivative $W_x(t, x_*(t))$ exists for all $t \geqslant 0$, and

$$W_x(t, x_*(t)) = Z_*(t) \int_t^\infty Z_*^{-1}(s) f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds, \qquad t \geqslant 0;$$

(ii) the partial derivative $W_t(t, x_*(t))$ exists for a.e. $t \geqslant 0$, and

$$\begin{aligned} &W_t(t, x_*(t)) + \\ &+ \sup_{u \in U(t)} \Big\{ \langle W_x(t, x_*(t)), f(t, x_*(t), u) \rangle + f^0(t, x_*(t), u) \Big\} \overset{a.e.}{=} 0; \end{aligned}$$

(iii) the vector function $t \mapsto \psi(t) = W_x(t, x_*(t))$, $t \geqslant 0$, is locally absolutely continuous and satisfies the core relations of the normal form maximum principle for problem (P):

$$\dot{\psi}(t) \overset{a.e.}{=} -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)),$$

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) \overset{a.e.}{=} \sup_{u \in U(t)} \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi(t)).$$

We discuss the relationships of Theorem 1 with some other versions of the maximum principle for infinite-horizon optimal control problems, and consider a few illustrative examples.

Bibliography

1. D. Acemoglu, *Introduction to modern economic growth*, Princeton Univ. Press, (2008).
2. S. M. Aseev, “Adjoint variables and intertemporal prices in infinite-horizon optimal control problems,” *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 290, 223–237 (2015).
3. S. M. Aseev, V. M. Veliov, “Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions,” *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 291, Suppl. 1, S22–S39 (2015).

ROTATING AND STANDING WAVES IN A RETARDED FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION OF NONLINEAR OPTICS

Budzinskiy S.

Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

stanislav.budzinskiy@protonmail.ch

In the present paper we delve into the study of self-organization phenomena in one delayed feedback optical system. It comprises a thin layer of a nonlinear Kerr medium, a ring cavity (feedback loop), and a delay device in the feedback loop.

In the one-dimensional approximation of a thin ring aperture, the dynamics of the system is described in terms of a real-valued function $u(x,t)$ that stands for the nonlinear phase modulation in the thin Kerr layer and satisfies a periodic boundary value problem for a retarded quasilinear equation [1]:

$$\partial_t u(x,t) + u(x,t) = D\partial_x^2 u(x,t) + |A_{feedback}|^2, \quad x \in (0, 2\pi), \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = u(2\pi,t), \quad \partial_x u(0,t) = \partial_x u(2\pi,t).$$

Here, $D > 0$ is the diffusion coefficient of molecular excitation in the Kerr layer, and $A_{feedback}$ denotes the complex amplitude of the light wave after it has passed the feedback loop.

We study a mathematical model that takes into account the diffraction phenomenon. Hence, $A_{feedback}$ takes the following form [1]:

$$A_{feedback} = \sqrt{K} A(x, z = z_0; \exp iu(t - T)),$$

where $K > 0$ is the nonlinearity parameter, $z_0 > 0$ is the diffraction parameter, $T > 0$ is the time delay, and $A(x, z; A_0)$ is the solution to a periodic initial-boundary value problem for a linear Schrodinger equation, which describes light propagation in the paraxial approximation:

$$\partial_z A + i\partial_x^2 A = 0, \quad x \in (0, 2\pi), \quad z > 0,$$
$$A(0,z) = A(2\pi,z), \quad \partial_x A(0,z) = \partial_x A(2\pi,z),$$
$$A(x,0) = A_0(x).$$

A common way to unravel the complex dynamics of a system is to apply the center manifold reduction followed by the normal form analysis [2]. We follow [3] to apply these techniques to our equation. We treat it as an autonomous differential equation in the space of uniformly continuous on $[-T,0)$ Banach-space-valued functions:

$$\mathcal{BC} = \left\{ u \in C([-T,0), H^2_{2\pi}) \quad | \quad \exists \lim_{\tau \to -0} u(\tau) \in H^2_{2\pi} \right\},$$

$H^2_{2\pi}$ being the Sobolev space of 2π-periodic square integrable functions with square integrable second derivatives. The approach in [3] allows one to compute the normal form of the reduced equation bypassing the explicit construction of a center manifold.

Our equation possesses both rotation and reflection symmetries. Therefore, under the Andronov-Hopf bifurcation conditions, the asymptotically stable center manifold is four-dimensional (this is not the case for systems with a transformation of the spatial argument in the feedback loop, see [4]) and corresponds to harmonics with a certain spatial frequency $\pm n_* \in \mathbb{Z}$ and temporal frequency $\pm \nu_* \in \mathbb{R}$. The normal form we obtain is peculiar to the present symmetries [5]:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho_1} &= \rho_1(A\mu + B\rho_1^2 + C\rho_2^2 + ...),\\
\dot{\varphi_1} &= \nu_* + ...,\\
\dot{\rho_2} &= \rho_2(A\mu + B\rho_2^2 + C\rho_1^2 + ...),\\
\dot{\varphi_2} &= \nu_* + ...,
\end{aligned}$$

where $(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2)$ are polar coordinates, and μ is a small perturbation of the nonlinearity parameter K (the bifurcation parameter).

When $A > 0$ — which holds for real-life parameters — two cases of supercritical ($\mu > 0$) bifurcation are of the utmost interest:

- $B < 0, \quad B + C < 0, \quad B - C < 0,$
- $B < 0, \quad B + C < 0, \quad B - C > 0.$

They give rise to orbitally asymptotically stable standing and rotating waves, respectively. We shall note that due to the reflection symmetry both clockwise and anticlockwise rotating waves are present simultaneously (compare with [4]), the direction of rotation being dependent only on the initial conditions.

We have also conducted a series of numerical experiments, which supports the existence and stability of standing and rotating waves.

Bibliography

1. M.A. Vorontsov, W.J. Firth, “Pattern formation and competition in nonlinear optical systems with two-dimensional feedback,” *Physical Review A*, 49, No. 4, 2891-2906 (1994).
2. J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag New York, (1983).

3. T. Faria, “Normal forms for semilinear functional differential equations in Banach spaces and applications. Part II,” *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 7, No. 1, 155-176 (2000)
4. A.V. Razgulin, T.E. Romanenko, “Rotating waves in parabolic functional differential equations with rotation of spatial argument and time delay,” *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 53, No. 11, 1626-1643 (2013).
5. S.A. van Gils, J. Mallet-Paret, “Hopf bifurcation and symmetry: travelling and standing waves on the circle,” *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 104, No. 3, 279-307 (1986).

DYNAMICS AND OPTIMIZATION OF MOTIONS FOR MOBILE ROBOTIC SYSTEMS

Chernousko F.L.

Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyi, Moscow Region, Russia

chern@ipmnet.ru

Locomotion of mobile robotic systems on surfaces and inside media can be based upon different principles. The mostly wide-spread types of mobile robots use wheels, legs, tracks, propellers, and other external devices. Also, the locomotion of mobile systems can be a result of a periodic change of configuration of systems similar to snakes, worms, fish, and other organisms.

In this paper we discuss the dynamics and optimal control for mobile robots whore motion is based upon the periodic change of their configuration. Several types of such mobile systems are considered.

1. Snake-like multibody systems consist of several rigid bodies connected by revolute joints where actuators are installed. These systems can move along a horizontal plane in the presence of dry friction forces acting between the snake and the plane. The progressive locomotion of snake-like robots is a result of periodic twisting of these systems. The algorithm of control for snake-like robots is proposed that consists of alternating fast and slow phases.

2. Quasi-static motions of multilink systems along a plane are considered. Here, the velocities and accelerations of bodies are assumed to be small enough, so that the motion can be regarded as a sequence of equilibrium positions under the action of torques created by actuators and friction forces. Quasi-static motions are slower than dynamic ones but require

smaller torques produced by actuators.

3. Multibody systems can move in a fluid by performing motions similar to those of swimming fish or frogs. Also, the motion in a fluid can be based on motions similar to rowing. Several kinds of multibody systems moving in a fluid in the presence of quadratic resistance forces are considered.

4. Systems containing internal moving masses can move progressively in various resistive media, if the internal masses perform special periodic motions inside the main body. This type of locomotion is possible in the presence of different resistance forces acting upon the main body including dry friction, linear, and quadratic isotropic/anisotropic forces depending on the body velocity. Such systems must contain energy sources; they can be hermetic and move in hazardous and vulnerable media as well as inside tubes. Note that this kind of mobile systems, contrary to the previous kinds, has no direct analogs among the living organisms.

For all types of mobile systems mentioned above, their dynamics were analyzed, and possible types of progressive motions were proposed. The average locomotion speed and energy consumption were evaluated for mobile systems under consideration. These criteria depend essentially on geometrical, mechanical, and control parameters of the systems.

Hence, it is to natural to determine optimal parameters and optimal controls that correspond to the maximum locomotion speed and/or minimum energy consumption. Certain optimal solutions are presented. It occurs that some properties of optimal motions are in good agreement with motions observed for biological objects.

Experimental data for mobile robotic systems are presented.

ON STATONARITY CONDITIONS IN STATE-CONSTRAINED OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR A TRAJECTORY WITH SINGLE BOUNDARY ARC

Dmitruk A., Samylovskiy I.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

dmitruk@member.ams.org, ivan.samylovskiy@cs.msu.ru

In this work, we consider the following state-constrained optimal control problem:

$$\mathbf{A:}\quad \begin{cases} \dot z = f(z,x,u), \quad x(t) \geqslant 0, \\ \dot x = g(z,x,u), \quad \varphi\left(u(t)\right) \leqslant 0, \\ J_A = J(z(0), z(T), x(0), x(T)) \to \min \end{cases}$$

Here, $z \in R^n$ and $x \in R^1$ are state variables, $u \in R^m$ is a control, the functions $z(\cdot)$ and $x(\cdot)$ are absolute continuous, $u(\cdot)$ is measurable and bounded. We assume that the functions f, g, φ of dimensions n, 1, d(φ), respectively are defined and continuous on an open subset $\mathcal{Q} \subset R^{n+1+m}$ together with their first-order partial derivatives w.r.t z, x, u. The state constraint is imposed only on scalar state coordinate x and has the simplest form $x \geqslant 0$.

We suppose the reference process $w^0 = (z^0, x^0, u^0)$ to be such that the trajectory $x^0(t)$ touches the state boundary only on a segment $[t_1^0, t_2^0]$, where $0 < t_1^0 < t_2^0 < T$. In other words, the interval $\Delta := [0, T]$ is divided into three parts $\Delta_1 := [0, t_1^0]$, $\Delta_2 := [t_1^0, t_2^0]$, and $\Delta_3 := [t_2^0, T]$, such that $x^0(t) > 0$ on $[0, t_1^0)$, $x^0(t) = 0$ on Δ_2, and $x^0(t) > 0$ on $(t_2^0, T]$ (see [1]). We also suppose the control u^0 to be continuous on Δ_1 , Δ_3 and Lipschitz continuous on Δ_2, $\varphi_s(u^0(t)) < 0$ on Δ_2 for all s, and the following strict inequalities hold at moments t_1^0, t_2^0: $\dot{x}^0(t_1^0 - 0) < 0, \quad \dot{x}^0(t_2^0 + 0) > 0.$

Our aim is to obtain stationarity conditions for process w^0 in form of Dubovitskii and Milyutin (see [2, 3, 4]) including the signs of state constraint multiplier and adjoint variable ψ_x jumps at points $t_{1,2}^0$.

We admit not only uniformly small variations of a control, but also small variations of its points of discontinuity. This corresponds to the consideration of the "extended" weak minimum (see, e.g., [5]) for a problem of type **A**.

Following [6], we introduce a new time $\tau \in [0, 1]$ and consider the time variable t on each segment Δ_i as a new state variable $t_i(\tau)$ subject to equation $\dfrac{dt_i}{d\tau} = \rho_i(\tau)$, where the functions $\rho_i(\tau) > 0$, $i = 1, 2, 3$ are additional controls. On the segment $[0, 1]$ we introduce the state variables $r_i(\tau) = z(t_i(\tau))$, $y_i(\tau) = x(t_i(\tau))$ and the controls $v_i(\tau) = u(t_i(\tau))$, such that the following equations are satisfied for $i = 1, 2, 3$:

$$\frac{dr_i}{d\tau} = \rho_i(\tau)\, f(r_i, y_i, v_i), \qquad \frac{dy_i}{d\tau} = \rho_i(\tau)\, g(r_i, y_i, v_i),$$

Thus, we "replicate" the variables of the original problem by taking their reductions to the intervals Δ_i and considering all of them as new variables of the new time.

Instead of state constraint $y_2(\tau) \geqslant 0$ on $[0, 1]$ we will consider the following pair of an endpoint and a mixed control-state constraints:

$$y_2(0) \geqslant 0, \qquad \frac{dy_2}{d\tau} \equiv 0, \quad \text{i.e.} \quad g(r_2, y_2, v_2) \equiv 0,$$

while the control constraints will be now written in the form

$$\varphi(v_i(\tau)) \leqslant 0, \qquad \rho_i > 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

In new problem we consider the “classical” weak minimum. Therefore, we do not need to consider the open constraints for ρ_i as well as the constraint $\varphi(v_2(\tau)) \leqslant 0$, since under our assumptions the control $v_2^0(\tau)$ lies strictly in its interior. Thus, we come to the following optimal control problem on the time interval $\tau \in [0,1]$:

$$\mathbf{B:}\ \begin{cases} \dfrac{dr_i}{d\tau} = \rho_i f(r_i, y_i, v_i), \quad r_1(1) - r_2(0) = 0, \quad r_2(1) - r_3(0) = 0 \\ \dfrac{dy_i}{d\tau} = \rho_i g(r_i, y_i, v_i), \quad y_1(1) - y_2(0) = 0, \quad y_2(1) - y_3(0) = 0 \\ \dfrac{dt_i}{d\tau} = \rho_i, \qquad t_1(0) = 0, \qquad t_1(1) - t_2(0) = 0, \\ t_2(1) - t_3(0) = 0, \qquad t_3(1) - T = 0, \\ g(r_2, y_2, v_2) \equiv 0, \qquad \varphi(v_1(\tau)) \leqslant 0, \qquad \varphi(v_3(\tau)) \leqslant 00, \\ J_B = J\,(r_1(0), r_3(1), y_1(0), y_3(1)) \to \min . \end{cases}$$

The last three constraints will be treated as mixed control-state ones. To each admissible process $w = (z, x, u)$ of problem **A** one can associate a (not unique) process $\gamma = (r_i, y_i, t_i, \rho_i, v_i)$ of problem **B**, and to each process of problem B one can associate a unique process of problem **A**. If the process $w^0 = (z^0(t), x^0(t), u^0(t))$ with the boundary arc $[t_1^0, t_2^0]$ provides the extended minimum in problem A, then the corresponding associated process $\gamma^0 = (r_i^0(\tau),\, y_i^0(\tau),\, t_i^0(\tau),\, \rho_i^0(\tau),\, v_i^0(\tau),\ i = 1,2,3)$ provides the weak minimum in problem **B**.

For process γ^0, we write stationarity conditions following [5, 6] and then rewrite these conditions in terms of problem **A**, which corresponds to the first step of method (without use of variations $\overline{x}(t) \geqslant 0$ concentrated on Δ_2^0). As a result, conditions contains a measure concentrated on segment Δ_2^0. To obtain nonnegativity of the density of this measure and nonnegativity of its jumps at points $t_{1,2}^0$ we use variations $\overline{x}(t) \geqslant 0$ concentrated on Δ_2^0. Using variations concentrated inside Δ_2^0 we obtain the nonnegativity condition $\dot{\mu}(t)$ on Δ_2^0 for the dencity of measure (see work [7] for details). Using variations concentrated in neighbourhoods of $t_{1,2}^0$, we obtain the nonnegativity conditions $\Delta\mu(t_{1,2}^0) \geqslant 0$ for the jumps of measure. Thus, we get full system of stationarity conditions in form [2, 6].

Bibliography

1. L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F Mishechenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, John Wiley & Sons, New York/London (1962).

2. A.Ya. Dubovitskii, A.A. Milyutin, “Extremum problems in the presence of restrictions”, *USSR Comp. Math. Math. Phys.*, 5 No 3, 1–80 (1965).
3. A.A. Milyutin, N.P. Osmolovskii, *Calculus of variations and optimal control*, American Mathematical Society, Providence (1998).
4. A.A. Milyutin, A.V. Dmitruk, N.P. Osmolovskii, *Maximum principle in optimal control (Princip maksimuma v optimal’nom upravlenii, in Russian)*, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mathematics and Mechanics (2004).
5. A.V. Dmitruk, N.P. Osmolovskii, “Necessary conditions for a weak minimum in optimal control problems with integral equations on a variable time interval”, *Disc. Cont. Dynam. Sys.*, 35 No 9, 4323 – 4343 (2015).
6. A.V. Dmitruk, A.M. Kaganovich, “The Hybrid Maximum Principle is a consequence of Pontryagin Maximum Principle”, *Systems & Control Letters*, 57 No 11, 964–970 (2009).
7. A.V. Dmitruk, I.A. Samylovskii, “On Stationarity Conditions in an Optimal Control Problem with a Simple Contact with the Phase Boundary”, *Moscow Univ. Comput. Math. and Cyb.*, 40 No 2, 57–64 (2016).

SYSTEMS ANALYSIS AND RECOGNITION OF EARTHQUAKE-PRONE AREAS

Gvishiani A.D.

Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

a.gvishiani@gcras.ru

With time, recognition of earthquake-prone areas is getting an ever more important field of inquiry. It includes fundamental seismological and mathematical components and applied component, oriented towards seismic engineering. By now seismic zoning is mostly done by statistical analysis of earthquake catalogues, strong ground motion’s accelerations and field studies of the already known recent and historical disaster areas. The topic of this paper is to widely increase the scope of seismic zoning methodology by introducing advanced and applied systems analysis to pattern recognition of places where epicenters of strongest, strong and moderate earthquakes may occur.

The focus of the investigation is four seismically dangerous regions: Andes, California, Caucasus and Crimea. They are used as samples to illustrate how systems analysis comes up with integration of seismic zonation statistical methods, classical EPA approach and innovative FCAZ recognition technique.

The result of the study shows that proposed systems analysis approach can significantly increase reliability of both seismic zonation and strongest, strong and moderate earthquake-prone areas identification.

An attempt is made to list characteristic features of systems analysis as a basis for its future systems analysis axiomatics as a pure mathematical discipline. Elements of artificial intelligence in EPA investigations are introduced in the frame of the systems analysis approach.

Finally, the EPA problem is reformulated in terms of fuzzy sets.

This research is supported by the Russian Science Foundation (project No 15-17-30020).

COMPARISON OF THE APPROACHES OF ESTIMATING THE NUMBER OF SWITCHINGS OF THE OPTIMAL CONTROLS IN THE OPTIMAL CONTROL EPIDEMIOLOGY PROBLEM

Khailov E.

Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

khailov@cs.msu.su

Grigorieva E.

Department of Mathematics and Computer Sciences, Texas Woman's University, Denton, USA

egrigorieva@mail.twu.edu

We consider on a given time interval two different SEIR (Susceptible-Exposed-Infected-Removed) type control models describing Ebola epidemics in a population of a constant size. Each of these models contains four bounded controls. Two of them reflect the efforts to protect susceptible individuals from infected and exposed individuals. Other two controls depending on the model define the efforts either for the treatment, or for the detection and isolation of exposed and infected individuals. Then, the common SEI control subsystem is allocated in these models, and for it the problem of minimizing the sum of total fractions of exposed and infected individuals and total weighted costs of control constraints over a given time interval is stated. The existence of the optimal controls in the considered minimization problem is discussed.

For the analysis of the corresponding optimal controls, the Pontryagin maximum principle is used. According to it, these controls are bang-bang functions, their behavior is completely determined by the behavior of the corresponding switching functions. For these functions the linear non-homogeneous non-autonomous system of differential equations is obtained. Some important properties of the switching functions and the corresponding optimal controls related to the analysis of this system are studied. In order to estimate the number of zeros of these functions using such system, two new approaches are proposed, compared with each other and with the previously developed approaches in [1, 2, 3].

The first of them is based on the analysis of the Cauchy problems for the derivatives of the switching functions. It is shown that each switching function has at most one zero on the given time interval, which means that the corresponding optimal control has at most one switching. The second approach concerns with the use of constancy of the Hamiltonian on the optimal solution of the original problem for reducing by one of the order of the system of differential equations for the switching functions. This approach results in obtaining the linear non-homogeneous non-autonomous system of differential equations for each switching function and its corresponding auxiliary function. Then, in each such a system the special substitutions of variables are made in order to reduce its matrix to an upper-triangular form on the entire time interval. The functions that perform such substitutions, satisfy the corresponding non-autonomous differential Riccati equations. Therefore, there arises the problem to prove the existence of such solutions of these equations that are defined on the entire time interval as well. The considered differential Riccati equations are of the same type: the coefficient of square of a function and the free coefficient are definite sign on the given interval, and furthermore, opposite in sign functions. Such properties of the coefficients of the Riccati equations are sufficient to prove the existence of the required solutions. Then, the corresponding to each Riccati equation transformed linear system is also defined on the entire time interval. Application to it of the generalized Rolle's theorem allows us to find the estimate of the number of zeros for the corresponding switching function. It is shown that each such a function has at most one zero on the given time interval and hence, the corresponding optimal control has at most one switching as well. Moreover, the results obtained for each switching function using the first and second approaches coincide. This means that if as the result of using the first approach it is obtained that the optimal control is constant over the entire time interval, then this optimal control would have the same type after application of the second approach. On the other hand, if the first approach shows that the optimal control is piecewise constant function with at most one switching, then this type of the optimal control is confirmed by the second approach and vise versa. This conclusion is the main result of our research.

Now, we describe the third approach for estimating the number of zeros of the switching functions. It consists in the following. In order to justify for the considered Riccati equations the existence of the solutions defined on the entire time interval, the sufficient condition is applied, which already showed its applicability in similar situations [1, 2]. It consists in the exact estimation of the absolute values of the coefficients of these Riccati equations, finding for obtained estimates the corresponding quadratic equations, and finally, checking the positiveness of their discriminants. Direct calculations show that for the validity of the inequalities arising in a such way, the additional restrictions on the parameters of the original system and control constraints are required. Consequently, the third approach has a limited applicability in comparison with the two approaches presented above. Assuming that these inequalities hold, we apply to each transformed linear system the generalized Rolle's theorem. As a result, by features of the applied sufficient condition, we find that each switching function has at most two zeros on the given time interval and hence, the corresponding optimal control has at most two switchings as well. Therefore, the third approach is not as good as the first two approaches.

Finally, let us discuss the fourth approach, which is not related to the use of constancy of the Hamiltonian on the optimal solution of the original problem [3]. It consists in the following. We earlier obtained the linear non-homogeneous non-autonomous system of differential equations, to which the switching functions satisfy. Using equations of this system, for each switching function and its corresponding two auxiliary functions the linear homogeneous non-autonomous system of differential equations is found. Then, the matrix of each such a system is transformed to an upper triangular form. Functions, which are responsible for this transformation, are given by a system of quadratic differential equations. For this system the existence of such solutions is investigated, which are defined on the entire time interval. It consists in the exact estimation in a special way of the right parts of quadratic differential equations, obtaining for found estimates some quadratic equation and finally, checking the positiveness of its discriminant. Thus, there is an additional inequality restriction on the parameters of the original system and control constraints. As a result, the transformed linear system is also defined on the given time interval. After applying to it the generalized Rolle's theorem we conclude that the considered switching function has at most two zeros on the given time interval and hence, the corresponding optimal control has at most two switchings as well. The same conclusions we obtain for other switching functions. Hence, we see that in the considered optimal control problem the fourth approach has the same disadvantages as the third approach, and therefore it is not also as good as the first two approaches.

Bibliography

1. E.V. Grigorieva, E.N. Khailov and A. Korobeinikov, "Optimal control for a susceptible-infected-recovered infections disease model," *Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics*, 1, No. 3, 324–331 (2013).
2. E.V. Grigorieva and E.N. Khailov, "Optimal vaccination, treatment, and preventive campaigns in regard to the SIR epidemic model," *Mathematical Modeling and Natural Phenomena*, 9, No. 4, 105–121 (2014).

3. E.V. Grigorieva and E.N. Khailov, “Optimal intervention strategies for a SEIR control model of Ebola epidemics,” *Mathematics*, 3, No. 4, 961–983 (2015).

CONTROL AND IDENTIFICATION PROBLEMS FOR DISTRIBUTED SYSTEMS WITH PERSISTENT MEMORY

Pandolfi L.

Dipartimento di Scienze Matematiche “Giuseppe Luigi Lagrange”, Politecnico di Torino, Torino, Italy

luciano.pandolfi@polito.it

Distributed systems with persistent memory of the type

$$\theta' = \alpha\Delta\theta + \int_0^t N(t-s)\Delta\theta(s)\,\mathrm{d}\,s \qquad (\mathbf{A})$$

are encountered in several applications[1] In particular, thermodynamics and diffusion processes with complex molecular structure (here $\theta = \theta(x,t)$ represents respectively temperature or concentration); viscoelasticity (here $\theta(x,t)$ is the displacement). The “relaxation kernel” $N(t)$ models the way some action (the flux, the stress...) at time s is sensed by the body at the subsequent time t.

Eq. **(A)** has to be supplemented with suitable initial and boundary conditions. In particular, we consider the case that a forcing term $f(t)$ (the *control*) acts on the system via the Dirichlet boundary condition, $\theta(x,t) = f(x,t)$ $x \in \partial\Omega$) (possibly, the support of $x \mapsto f(x,t)$ might be contained in a fixed relatively open subset Γ_0 of $\partial\Omega$).

Control problems for Eq. **(A)** have been considered by several authors (Balachandran, Lagnese, Lasiecka, Leugering, Kim, L.P. and coauthors) and several different methods have been developed.

As it is to be expected, the properties of the solutions of Eq. **(A)** depends on whether $\alpha > 0$ or $\alpha = 0$ and on the regularity properties of $N(t)$. This is easily understood by considering the limiting cases when $\alpha > 0$ and $N(t) \equiv 0$ (in this case Eq. **(A)** is the heat equation) or $\alpha = 0$ and $N(t) \equiv 1$ (in this case Eq. **(A)** is the wave equation).

The goal of this talk is twofold:

[1] $\theta \in \mathbb{R}^n$ and, for the sake of simplicity, Δ is the laplacian in a region $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ with smooth boundary, but more general elastic operators, as the bilaplacian or the Lamé operator, can be used.

- we outline recent results on controllability/lack of controllability of Eq. **(A)**. Namely: when $\alpha = 0$ and $N(t)$ is smooth, Eq. **(A)** has controllability properties which are similar to the known controllability propertie of the wave equation: controls $f \in L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ can be used to force $(w(T), w'(T))$ to hit any prescribed target in $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ (at a suitable time T, and if Γ_0 has suitable geometric properties) (see for example [2, 3, 4]).
- when $\alpha > 0$, a natural conjecture is to expect controllability property that extend the known properties of the heat equation: approximate controllability plus the possibility of hitting the target $\xi = 0$ (possibly at a suitable time T). While approximate controllability indeed holds, an *unexpected property is the existence of initial data which cannot be steered to hit the target* 0 (see [1]).

Finally, we note that the function $N(t)$ has to be derived from experimental measures This is not an easy task and, as most of the inverse problems, it is a *nonlinear problem.* Due to such difficulties, algorithms for the identification of the kernel $N(t)$ are a subject of permanent interest both in mathematical and engineering journals. We mention that the ideas used in the study of controllability suggest an algorithm for kernel identification, based on two boundary measure of the flux. The bonus of this algorithm is that it is *linear* in the sense that the unknown kernel $N(t)$ is the solution of a *deconvolution problem,* i.e. of a *linear* Volterra integral equation of the first kind (see [5]).

Bibliography

1. A. Halanay, L. Pandolfi "Approximate controllability and lack of controllability to zero of the heat equation with memory," *J. Math. Analysis Appl.*, 425, 194-211 (2015).
2. L. Pandolfi, *Distributed systems with persistent memory. Control and moment problems,* Springer Briefs in Electrical and Computer Engineering. Control, Automation and Robotics. Springer, Cham, (2014).
3. L. Pandolfi, "Controllability of isotropic viscoelastic bodies of Maxwell-Boltzmann type," submitted.
4. L. Pandolfi "Controllability of a viscoelastic plate using one boundary control in displacement or bending," submitted.
5. L. Pandolfi, "Identification of the relaxation kernel in diffusion processes and viscoelasticity with memory via deconvolution," *Math. Methods Applied Sci.*, in print.

OPTIMAL CONTROL OF UNBOUNDED DIFFERENTIAL INCLUSIONS

Polovinkin E.

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny Moscow region, Russia

polovinkin.es@mipt.ru

While studying necessary conditions for a local solution of a Mayer extremal problem on functional minimization on the set of trajectories of some differential inclusion, one pays attention to the behavior of the trajectories of the differential inclusion in a neighborhood of an optimal solution. An account of the development of necessary conditions for bounded differential inclusions with the standard Lipschitz condition may be found, for example, in [1, 2, 3, 4, 5]. However, if the values of right-hand side F of differential inclusion are allowed to be unbounded, then the Lipschitz condition becomes unacceptably strong. Meanwhile, the unboundedness of the values of the right-hand side F is a natural property of differential inclusions, which appears in optimal control problems. For example, it appears when one is concerned with a Mayer problem obtained as a result of reformulation of a problem with integral functional.

In the present lecture, we consider a Mayer optimal control problem whose dynamic constraint is given by a differential inclusion with unbounded right-hand side. We consider a differential inclusion with conditions that are very closed to that introduced by Clarke in [6]. The present paper continues the study of the direct method, which was proposed by G. V. Smirnov and the author [7], and later by the author [8], from the case of bounded right-hand side of the differential inclusion to the case of an unbounded right-hand side. This direct method is a development of the classical method of variations underlying the Pontryagin maximum principle for classical optimal control problems [9]. In short, our direct method consists of the following elements: the continuity property of the trajectory set of a differential inclusion; a continuous pseudo-linearization of a differential inclusion near some trajectory; a description of the trajectory set of an adjoint convex process (calculation of a polar cone to the trajectory set of convex process); properties of boundary trajectories; and necessary conditions for the solution of the initial Mayer problem.

In this way we prove in [10, 11, 12] necessary conditions incorporating the Euler–Lagrange inclusion with no use of the Clarke normal cone or the limiting normal cone (see Theorem 2.2.3 [6]). In Conclusions, we give an example of a system on which our conditions can be applied to obtain sharper necessary conditions, with respect to the other conditions in literature.

Bibliography

1. F.H. Clarke : Optimization and Nonsmooth Analysis, *J. Wiley*, New York (1983)
2. B. S. Mordukhovich : Discrete approximations and refined Euler–Lagrange conditions for nonconvex differential inclusions. *SIAM J. Control Optim.*, **33**, 882–915, (1995).
3. A. D. Ioffe : Euler–Lagrange and Hamiltonian formalisms in dynamic optimization. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349**, 2871–2900, (1997).
4. F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern, P. R. Wolenski : Nonsmooth Analysis and Control Theory. *Graduate Texts in Mathematics*, **178** Springer-Verlag, New York (1998).
5. B. S. Mordukhovich : Variational Analysis and Generalized Differentiation I, II, *Springer-Verlag*, Berlin Heidelberg, (2006).
6. F. H. Clarke : Necessary Conditions in Dynamic Optimization. *AMS*, V. 173, N. 816, Providence (2005)
7. E. S. Polovinkin, G. V. Smirnov : Time-optimum Problem for Differential Inclusions, *Differential equations* **22**, pp. 940 – 952 (1986). Russian original in *Differen. Uravn.* **22**, pp. 1351 – 1365 (1986).
8. E. S. Polovinkin : Necessary Conditions for Optimization Problems with Differential Inclusions. In: Kurzhanski, A. B., Veliov, V. M. (eds.): *Set-Valued Analysis and Differential Inclusions*, Birkhäuser, Boston, ser. PSCT **16**, 157–170 (1993)
9. L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko : The Mathematical Theory of Optimal Processes. *Pergamon*, Oxford, (1964).
10. E. S. Polovinkin : Differential Inclusions with Measurable Pseudo-Lipschitz Right - Hand Side. *Proc. Steklov Inst. Math.* **283**, 116–135 (2013)
11. E. S. Polovinkin : Differential Inclusions with Unbounded Right-Hand Side and Necessary Optimality Conditions *Proc. Steklov Inst. Math.* **291**, 237–252 (2015).
12. E. S. Polovinkin : Time Optimum Problems for Unbounded Differential Inclusion *IFAC-PapersOnLine* **48**, Is. 25, 150–155 (2015)

REACHABLE SETS FOR THE SIMPLEST MODEL OF THE CAR'S MOTION AND 3D PRINTING

Starodubtsev I.S., Fedotov A.A., Averbukh V.L., Patsko V.S.

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ekaterinburg, Russia

Let a control system dynamics be described by a stationary vector differential equation $\dot{z} = f(z,u)$ with a geometric constraint $u(t) \in P$, and $z(t; z_0, u(\cdot))$ be a system position at the instant t on a trajectory beginning from the initial point z_0 at the instant $t_0 = 0$. Then *the reachable set at a fixed instant T* is

$$G(T; z_0) = \bigcup_{u(\cdot)} z(T; z_0, u(\cdot\,)).$$

The join is performed over all *admissible controls* $u(\cdot\,)$.

In many cases, the reachable set is closed in the class of piecewise-continuous controls. So, as admissible controls $u(\cdot\,)$, we can take piecewise-continuous functions $t \to u(t)$.

The reachable set $G(T; z_0)$ at the fixed instant T comprises of all points, to which the control system can be delivered (by means of admissible controls) at the given instant T from the initial point z_0 given at the instant $t_0 = 0$. If for a stationary system we say about the reachable set $G^*(T; z_0)$ *till the instant* T, then

$$G^*(T; z_0) = \bigcup_{t \in [0,T]} \bigcup_{u(\cdot)} z(t; z_0, u(\cdot\,)).$$

Here, the join is additionally performed over all instants $t \in [0, T]$.

Appearance of 3D-printers opens opportunity of full-scale visualization of three-dimensional reachable sets. Such three-dimensional bodies performed on the 3D-printer make easy comprehension of geometry of the reachable sets.

An adequate physical visualization gets off the “mysticism” and connected with it “fear” of students and engineers to use results of the mathematical control theory to investigate and solve applied problems.

At the same time, presence of comprehension can suggest such “reasonable” variants of approximation for three-dimensional objects, for which the most important quality characteristics of the objects are not lost.

Let the reachable sets be investigated *at the instant* and *till the instant* for a simple model of car motion (Dubins car [4]). The dynamics is described as follows:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = V\cos\varphi, \quad \dot{y} = V\sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{k}{V}u, \\ &|u| \leqslant 1, \;\; V = \mathsf{const} > 0, \;\; k = \mathsf{const} > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Here, x and y are coordinates of the geometric position, φ is the heading of the velocity vector, V is the velocity value, k is the maximal value of the lateral acceleration. Admissible controls $u(\cdot\,)$ are piecewise-continuous functions of time that satisfy the constraint $|u(t)| \leqslant 1$. Values of the heading angle φ are considered in the interval $(-\infty, +\infty)$.

The phase vector (x, y, φ) in (1) is denoted as z. To be short, assume $\alpha = k/V$. Peculiarity of system (1) is in the fact that the initial state z_0 affects onto the reachable set with accuracy up to a turn and transfer. So, assume $z_0 = 0$ and write $G(T)$, $G^*(T)$ instead of $G(T; z_0)$, $G^*(T; z_0)$.

In paper [2], the form of the reachable sets $G(T)$ was found in projection onto the plane of geometric coordinates x, y. In [5], the reachable sets $G(T)$ were investigated in the three-dimensional space x, y, φ. In work [3], the reachable sets $G^*(T)$ were investigated. Also, the sets $G(T)$ and $G^*(T)$ were considered under nonsymmetric constraints onto the control u.

To obtain for system (1) computer images of the reachable sets, the `VRML` (v2.0) format was used.

It was proved in [5] that the boundary of the reachable set $G(T)$ under the symmetric constraint $|u| \leqslant 1$ comprises of six surfaces given in the three-dimensional space and defined by two parameters. These parameters are the instants of the control switches.

One of these surfaces corresponds to the control values $-1, 0, 1$ that are performed in time namely in the shown order. In this case, the parameter t_1 corresponds to the instant of the control switching from the value -1 to 0, and the parameter $t_2 \in [t_1, T]$ corresponds to the control switching from the value 0 to 1. Other five surfaces correspond to the control collections $1, 0, -1$; $1, 0, 1$; $-1, 0, -1$; $1, -1, 1$; $-1, 1, -1$.

For each of the surfaces mentioned above, a uniform time-step grid is given for forming collection of the switch instants. Instants 0 and T are formally included into this collection. Note that the third equation of system (1) is stationary and linear w.r.t. the control u. So, values $\varphi(T)$ at an instant T also belong to nodes of the uniform grid on φ. Under this, an interval of possible values of φ is $[0,\ \alpha T]$ for the control version +1, 0, +1; $[-\alpha T,\ 0]$ for control $-1, 0, -1$; and $[-\alpha T,\ \alpha T]$ for all other four versions of control. This allows one to provide layer-after-layer constructing the considered surfaces with a uniform step in φ.

In preparation of the sets $G^*(T)$ for 3D-printing, the data are firstly formed for building the sets $G(T)$. After that, the collections of the space-triangle elements are added to them. These collections have been built during procession of the layers obtained on the grid of instants from 0 till T under marginal controls with only one switch instant as a parameter [3].

Thus, in all cases, a collection of surfaces (containing boundary of the reachable set) is written into a text-file in the `STL` format. The surfaces' parts that are not on the boundary of the reachable set are placed inside the object to be formed. Triangulation of the surfaces is performed "layer-after-layer" with using the property of continuity of cross-sections on φ for the reachable sets at the instant and on t for the additional surface for the reachable sets till the instant.

The sets have nontrivial geometry. Nevertheless, as a result of processing the obtained spatial objects, it was succeeded to achieve not only good quality of the three-dimensional printed images, but, also, to formulate criteria necessary for successful physical visualization.

When preparing this paper, the authors became aware that a close 3D-printing work was done [1] at Mines Paristech / LAAS-CNRS by G. Caner under the supervision by J.-P. Laumond. Namely, reachable sets till the instant were built for the Dubins car, as well as for the Reeds-Shepp car, by means of a 3D-printer. A mathematical model of the Reeds-Shepp car is also widely used in robotics and is described in [4].

The work has been partially supported by Program of Presidium RAS "Mathematical problems of modern control theory" and Russian Foundation for Basic Researches under project No.15-01-07909.

Bibliography

1. Caner G. *Modelisation en 3D de la boule de Reeds & Shepp,* Rapport de stage d'option, Mines Paristech, LAAS-CNRS, (2015).
2. Cockayne E. J., Hall G. W. C. "Plane motion of a particle subject to curvature constraints," *SIAM J. Control.*, 13, No. 1, 197–220 (1975).
3. Fedotov A. A., Patsko V. S., Turova V. L. "Reachable sets for simple models of car motion". In: *Recent Advances in Mobile Robotics*, Ed. by A. V. Topalov. Rijeka: InTech, 147–172 (2011).
4. Laumond J.-P. (ed.) "Robot Motion Planning and Control," *Lect. Notes in Contr. and Inform. Sci.*, 229. Springer, New York, (1998).
5. Patsko V. S., Pyatko S. G., Fedotov A. A. "Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system," *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 42, No. 3, 320–328 (2003).

ЛИНЕЙНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ РЕГЕНЕРАТИВНОГО ВОЗДУХОПОДОГРЕВАТЕЛЯ ТЭЦ

LINEAR DISCRETE MODEL OF A ROTATING REGENERATIVE HEATER OF THE THERMAL POWER STATION

Азамов А.А., Бекимов М.А.

Институт математики Национального университета Узбекистана им. М.Улугбека

abdulla.azamov@gmail.com, mansu@mail.ru

Методом усреднения распределенных параметров строится математическая модель вращающихся регенеративных воздухонагревателей (ВРВН) тепловых электростанций. В отличие от имеющихся моделей представление теплообмена в ВРВН в виде дискретного процесса приведет к линейной системе разностных уравнений, что позволяет определить значения характеристических параметров ВРВН, исходя из результатов измерения температур и скорости входящих потоков воздуха и смеси дыма и отработанных газов, после чего находить температуру как выходящих потоков подогретого воздуха и наполнителей ВРВН. Устанавливаются также устойчивость установившего и периодического режимов, эргодичность, управляемость и другие свойства самой системы.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНО-ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

SOLUTION TO A COEFFICIENT-INVERSE PROBLEM FOR A HYPERBOLIC TYPE EQUATION

Айда-заде К.Р.

Институт Систем Управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан

kamil_aydazade@rambler.ru

Рагимов А.Б.

Университет Экс-Марсель, Институт Френеля, Марсель, Франция
Институт Систем Управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан

anar.rahimov@fresnel.fr, anar_r@yahoo.com

Рассмотрим коэффициентно-обратную задачу определения неизвестного коэффициента $C(x)$ линейного гиперболического уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad = \quad & a_0(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + a_1(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + a_2(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \\ & + a_3(x,t)v(x,t) + f(x,t) + B(x,t)C(x), \qquad (1) \\ & (x,t) \in \Omega = (x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T, \end{aligned}$$

при следующих условиях:

$$v(x,0) = \phi_0(x), \qquad \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = \phi_1(x), \qquad x \in [0,l], \qquad (2)$$

$$v(x,T) = \phi_2(x), \quad x \in [0,l], \qquad (3)$$

$$v(0,t) = \psi_0(t), \qquad v(l,t) = \psi_1(t), \qquad t \in [0,T]\,. \qquad (4)$$

Функции $a_0(x,t) > 0$, $a_i(x,t)$, $i = 1,2,3$, $f(x,t)$, $B(x,t)$, $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ являются заданными и удовлетворяют всем условиям существования и единственности идентифицируемой неизвестной функции $C\left(x\right)$. В частности, удовлетворены условия согласования:

$$\phi_0(0) = \psi_0(0), \quad \phi_0(l) = \psi_1(0), \quad \psi_0(T) = \phi_2(0), \quad \psi_1(T) = \phi_2(l).$$

Предлагается подход к численному решению задачи (1)-(4), основанный на использовании методов прямых. Задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными параметрами. Для определения неизвестных параметров предлагается метод, основанный на методе типа прогонки [1,2].

Проведя прямые $x = x_i = ih_x$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$, $h_x = l/(N+1)$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которую запишем в матричном виде:

$$v''(t) = A_1(t)v'(t) + A_2(t)v(t) + \tilde{f}(t) + B(t)C, \quad t \in [0, T], \tag{5}$$

где $v_i(t) = v(x_i, t)$, $a_{si}(t) = a_s(x_i, t)$, $s = 0, 1, 2, 3$, $f_i(t) = f(x_i, t)$, $B_i(t) = B(x_i, t)$, $i = 1, ..., N$, $v(t) = (v_1(t), \ldots, v_N(t))^*$, $C = (C_1, \ldots, C_N)^* = (C(x_1), \ldots, C(x_N))^*$, $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_N(t))^*$, $B(t) = (B_1(t), \ldots, B_N(t))^*$, $*$ – знак транспонирования, $A_1(t)$ – N-мерная диагональная матрица, у которой i-тый диагональный элемент равен $a_{2i}(t)$, $i = 1, \ldots, N$;

$$\tilde{f}(t) = \left(f_1(t) + \left[\frac{a_{01}(t)}{h_x^2} - \frac{a_{11}(t)}{2h_x}\right]\psi_0(t),\ f_2(t), \ldots, f_{N-1}(t),\right.$$
$$\left. f_N(t) + \left[\frac{a_{0N}(t)}{h_x^2} + \frac{a_{1N}(t)}{2h_x}\right]\psi_1(t)\right)^*;$$

$A_2(t)$ — N-мерная квадратная трехдиагональная матрица, ненулевые элементы которой равны:

$$\tilde{a}_{ii}\left(t\right) = \frac{1}{h_x^2}\left[-2a_{0i}\left(t\right) + h_x^2 a_{3i}\left(t\right)\right],\ i = 1, \ldots, N,$$
$$\tilde{a}_{i,i+1}\left(t\right) = \frac{1}{h_x^2}\left[a_{0i}\left(t\right) + \frac{h_x}{2}a_{1i}\left(t\right)\right],\ i = 1, \ldots, N-1,$$
$$\tilde{a}_{i,i-1}\left(t\right) = \frac{1}{h_x^2}\left[a_{0i}\left(t\right) - \frac{h_x}{2}a_{1i}\left(t\right)\right],\ i = 2, \ldots, N.$$

Ясно, что

$$v_0(t) = \psi_0(t), \quad v_{N+1}(t) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T].$$

Относительно вектор-функции $v(t)$ из (2)-(3) имеем следующие начальные и финальные условия:

$$v(0) = \phi_0, \qquad v'(0) = \phi_1, \tag{6}$$

$$v(T) = \phi_2. \tag{7}$$

Решение системы (5) будем искать в виде представления:

$$v(t) = \alpha(t) + \beta(t)C, \tag{8}$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ пока произвольные соответственно N-мерные векторная и квадратная матричная функции, которые исходя из (6) должны удовлетворять условиям:

$$\alpha(0) = \phi_0, \qquad \alpha'(0) = \phi_1, \tag{9}$$

$$\beta(0) = 0_{N\times N}, \qquad \beta'(0) = 0_{N\times N}, \tag{10}$$

где $\phi_0 = (\phi_0(x_1), \dots, \phi_0(x_N))^*, \phi_1 = (\phi_1(x_1), \dots, \phi_1(x_N))^*$.

Продифференцировав (8) дважды по t, подставив в (5), после некоторых преобразований получим следующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\alpha''(t) = A_1(t)\alpha'(t) + A_2(t)\alpha(t) + \tilde{f}(t), \tag{11}$$

$$\beta''(t) = A_1(t)\beta'(t) + A_2(t)\beta(t) + B(t), \tag{12}$$

с начальными условиями (9), (10). Задачи Коши (11), (9) и (12), (10) решаются раздельно и для этого можно использовать любые численные методы. После их решения и определения функций $\alpha(t)$, $\beta(t)$ из условия (7) имеем линейную систему алгебраическую уравнений N порядка:

$$v(T) = \alpha(T) + \beta(T)C = \phi_2,$$

из которой получаем искомой вектор C:

$$C = \beta^{-1}(T)[\phi_2 - \alpha(T)],$$

где $\phi_2 = (\phi_2(x_1), \dots, \phi_2(x_N))^*$.

Для получения вектора C вместо обращения матрицы, естественно, можно использовать какой-либо численный метод решения систем алгебраических уравнений.

Литература

1. Aida-zade, K.R., Rahimov, A.B., “An approach to numerical solution of some inverse problems for parabolic equations,” *Inverse Problems in Science and Engineering*, 22, No. 1, 96-111 (2014).
2. Айда-заде К.Р., Рагимов А.Б., “Решение классов коэффициентно-обратных задач и задач с нелокальными условиями для параболических уравнений,” *Дифференциальные уравнения*, 51, No. 1, 84-94 (2015).

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ МЕТОД СТРЕЛЬБЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕЯВНО ЗАДАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

REGULARIZED SHOOTING METHOD FOR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH IMPLICITLY SET BOUNDARY CONDITIONS

Будак Б.А.

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

babudak@gmail.com

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый задачей Коши

$$\dot{x}(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant T; \quad x(t_0) = x_0,$$

где $D(t)$, $B(t)$, $f(t)$ – известные матрицы размеров $n \times n$, $n \times r$, $n \times 1$ соответственно с кусочно-непрерывными элементами, t_0, T – заданные моменты времени, $x_0 \in E^n$ – заданный вектор, $u = u(t) \in L_r^2(t_0, T)$ – управление. Под $x = x(t; u)$ будем понимать решение рассматриваемой задачи Коши, соответствующее управлению $u = u(t)$.

Поставим задачу оптимального управления

$$J(u) = g_0(x(T; u)) \to \inf_U;$$
$$U = \{u \in U_0 \subseteq L_r^2(t_0, T) \,:\, g_i(x(T; u)) \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m\},$$

где U_0 – заданное выпуклое замкнутое множество из $L_r^2(t_0, T)$, и составим для нее функцию Лагранжа:

$$L(u, \lambda) = g_0(x(T; u)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x(T; u)),$$
$$u \in U_0, \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in E_+^m.$$

Для решения поставленной задачи ранее автором был предложен метод, основанный на статье [1], описываемый уравнениями

$$u_0 \in U_0, \lambda_0 \in E_+^m \text{ заданы};$$

$$v_k = Pr_{U_0}\left(u_k - \alpha_k L'_u(u_k,\lambda_k)\right),\ \mu_k = Pr_{E_+^m}\left(\lambda_k + \alpha_k L'_\lambda(u_k,\lambda_k)\right);$$

$$C_k = \left\{(w,\nu) \in U_0 \times E_+^m \ : \ \begin{array}{c} \|v_k - w\|^2_{L^2_r(t_0,T)} + |\mu_k - \nu|^2 \leqslant \\ \leqslant \|u_k - w\|^2_{L^2_r(t_0,T)} + |\lambda_k - \nu|^2 \end{array}\right\};$$

$$Q_k = \left\{(w,\nu) \in U_0 \times E_+^m \ : \ \begin{array}{c} \langle w - u_k, u_k - u_0\rangle_{L^2_r(t_0,T)} + \\ +\langle \nu - \lambda_k, \lambda_k - \lambda_0\rangle \geqslant 0 \end{array}\right\};$$

$$(u_{k+1},\lambda_{k+1}) = Pr_{C_k\cap Q_k}\left((u_0,\lambda_0)\right).$$

При естественных предположениях была доказана сильная сходимость метода к решению рассматриваемой задачи u_* в пространстве $L^2_r(t_0,T)$.

Отметим, что на практике вычисление производных $L'_u(u_k,\lambda_k)$ требует решения двух задач Коши, поэтому надеяться, что они будут найдены точно, не приходится. Это означает, что вышеупомянутый метод должен быть регуляризован. Будем считать, что нам на каждом шаге удается находить приближение $L_k(u_k,\lambda_k)$ производной $L'_u(u_k,\lambda_k)$, удовлетворяющее соотношению

$$\|L_k(u_k,\lambda_k) - L'_u(u_k,\lambda_k)\| \leqslant \delta_k\left(1 + \|u_k\|_{L^2_r(t_0,T)}\right).$$

Уравнения регуляризованного метода выглядят следующим образом:

$$u_0 \in U_0, \lambda_0 \in E_+^m \text{ заданы};$$

$$v_k = Pr_{U_0}\left(u_k - \alpha_k(L_k(u_k,\lambda_k) + \beta_k u_k)\right),$$

$$\mu_k = Pr_{E_+^m}\left(\lambda_k + \alpha_k(L'_\lambda(u_k,\lambda_k) + \beta_k\lambda_k)\right);$$

$$C_k = \left\{(w,\nu) \in U_0 \times E_+^m \ : \ \begin{array}{c} \|v_k - w\|^2_{L^2_r(t_0,T)} + |\mu_k - \nu|^2 \leqslant \\ \leqslant \|u_k - w\|^2_{L^2_r(t_0,T)} + |\lambda_k - \nu|^2 + \\ +\frac{2\alpha_k\delta_k^2}{\beta_k(2-\alpha_k\beta_k)}\left(1 + \|u_k\|_{L^2_r(t_0,T)}\right)^2 + \\ +\frac{2\alpha_k\beta_k}{2-\alpha_k\beta_k}C_0 \end{array}\right\};$$

$$Q_k = \left\{(w,\nu) \in U_0 \times E_+^m \ : \ \begin{array}{c} \langle w - u_k, u_k - u_0\rangle_{L^2_r(t_0,T)} + \\ +\langle \nu - \lambda_k, \lambda_k - \lambda_0\rangle \geqslant 0 \end{array}\right\};$$

$$(u_{k+1}, \lambda_{k+1}) = Pr_{C_k \cap Q_k}\left((u_0, \lambda_0)\right),$$

где C_0 – константа, ограничивающая сверху нормы решений поставленной задачи.

При естественных предположениях на данные задачи и параметры $\alpha_k, \beta_k, \delta_k$ доказана сильная сходимость регуляризованного метода к множеству проекций точки u_0 на множество решений рассматриваемой задачи U_* в пространстве $L^2_r(t_0, T)$.

Литература

1. Будак Б.А., "Метод стрельбы для решения задач равновесного программирования", *ЖВМиМФ*, Т. 53, No 12, 2008-2013 (2013).

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С ДИНАМИКОЙ

REGULARIZED EXTRAGRADIENT METHOD IN MULTICRITERIA PROBLEMS WITH DYNAMICS

Васильев Ф.П., Артемьева Л.А.

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

vasiliev.fp@gmail.com, artemieva.luda@gmail.com

Антипин А.С.

ВЦ имени А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия

asantip@yandex.ru

В работе рассматривается задача оптимального управления для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с граничным условием, заданным неявно и связанным с многокритериальной задачей.

Пусть управляемый процесс описывается следующей задачей Коши:

$$\dot{x}(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t) + g(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad x(t_0) = x_0,$$

где $D(t)$, $B(t)$, $f(t)$ – матрицы размера $n \times n$, $n \times r$, $n \times 1$ соответственно с кусочно-непрерывными элементами, t_0, t_1 — заданные моменты времени, $x_0 \in E^n$ — заданная точка, $u = u(t) \in L_2^r[t_0, t_1]$ — управление, $x = x(t; u) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ – траектория системы, соответствующая управлению $u(t)$.

Как известно, для каждого управления $u = u(t) \in L_2^r[t_0, t_1]$, задача имеет единственное решение $x = x(t; u)$, являющееся абсолютно непрерывной функцией на отрезке $[t_0, t_1]$, почти всюду удовлетворяющая первому уравнению, $g(t)$ – заданная вектор-функция.

Требуется найти управление $u \in U$ и вектор $\lambda \in E_+^m$ из условий:

$$\langle \lambda, f(x(t_1; u)) \rangle \to \inf,$$

$$\langle \mu - \lambda, f(x(t_1; u)) - \lambda \rangle \leqslant 0, \quad \forall \mu \in E_+^m,$$

где $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^m(x))$, $x \in E^n$ – заданная вектор-функция с выпуклыми, дифференцируемыми координатами $f^i(x)$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, m$.

Такую задачу можно истолковать следующим образом. Пусть группа из m участников образует сообщество (экономический союз) для реализации общей цели (проекта). Цели и интересы каждого из участников описываются стоимостными целевыми функциями $f^i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, которые определены на множестве X. Проблема, стоящая перед участниками заключается в том, как выбрать распределение поставок ресурсов так, чтобы с одной стороны, проект был реализован с наименьшими суммарными расходами, а, с другой стороны, каждый из участников минимизировал свой вклад в реализацию общего проекта. Предполагается, что участники проекта договорились, что в качестве своего вклада в проект они выбирают точки Парето множества $\{f(x),\ x \in X\}$. Как известно, если функции $f^i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ выпуклы на X, то точки Парето являются точками минимума функции $\langle \lambda, f(x) \rangle$ на множестве X при условии $\lambda \in E_+^m$. Так мы приходим ко второму условию.

Заметим, что это условие, как правило, порождает обширное множество точек Парето. Для разных Парето оптимальных точек, которые задают конфигурацию параметров будущего проекта, его стоимость, вообще говоря, разная. Естественно выбрать параметры, при которых проект имеет минимальную стоимость. Такой выбор можно реализовать, рассматривая игру двух лиц с равновесием по Нэшу. Здесь одно лицо — это группа участников проекта, второе лицо — игрок, распоряжающийся параметрами (ценами) $\lambda \in E_+^m$ и учитывающий групповые интересы, что отражено в третьем условии.

В работе, считая, что входные данные задачи известны неточно, требуется найти точку равновесия такой задачи. Для ее решения в работе предлагается регуляризованный вариант экстраградиентного метода, доказывается его сходимость, строится регуляризующий оператор.

Литература

1. Антипин А.С., Хорошилова Е.В. "Многокритериальная краевая задача в динамике", *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 21, No. 3, 20-29 (2015).
2. Васильев Ф.П., *Методы оптимизации*, Издательство МЦНМО, (2011).
3. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Издательство Мир, (1979).

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ТОЛЬКО ОТ ФАЗОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

STUDY OF A ONE-DIMENSIONAL OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH A PURELY STATE-DEPENDENT COST

Вдовина А.К., Дмитрук А.В.

МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва, Российская Федерация

anastasia.vdovina@cs.msu.ru

Аннотация. Рассматривается одномерная задача оптимального управления с функционалом, зависящим только от фазовой переменной, и унимодулярной подынтегральной функцией. Показано, что, при некоторых предположениях, задачу можно решить без применения принципа максимума Понтрягина, используя методы классического анализа, основанные на теореме сравнения Чаплыгина. Однако, в некоторых модификациях рассматриваемой задачи использование принципа максимума как основного инструмента для решения является более предпочтительным. Для исходной задачи и некоторых наиболее интересных её модификаций получен оптимальный синтез.

Введение. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления на фиксированном отрезке времени $[0,T]$:

$$J(x(t)) = \int_0^T e^{-rt} \cdot \Phi(x(t))\, dt \to \max,$$

$$\dot{x} = f(x) + u\, g(x), \qquad |u| \leqslant 1, \qquad x(0) = x_0, \qquad x(T) = x_T,$$

где и фазовая переменная $x(\cdot)$, и управление $u(\cdot)$ – скалярные функции. Предполагаем, что функция Φ непрерывна и *унимодулярна*. Функции f и g дифференцируемы, и $g(x) > 0$. Отрезок $[0, T]$ предполагается достаточно большим.

Стандартный случай. Сначала рассмотрим "стандартный" случай, когда

$$f(x^*) + g(x^*) > 0 \qquad \text{и} \qquad f(x^*) - g(x^*) < 0.$$

Предположим, что

A1) при $x_0 < x^*$, имеем $f(x) + g(x) > 0$ для всех $x \in [x_0,\, x^*]$,

A2) при $x_0 > x^*$, имеем $f(x) - g(x) < 0$ для всех $x \in [x^*, x_0]$.

Замечание Моменты t_1 и t_2 можно вычислить следующим образом. На Δ_1 имеем $dx = (f(x) + g(x))\, dt$, следовательно,

$$|\Delta_1| \; = \int_{x^*}^{x_0} \frac{dx}{g(x) + f(x)} \text{ и } t_1 = |\Delta_1|.$$

Аналогично получим

$$|\Delta_3| = \int_{x^*}^{x_T} \frac{dx}{g(x) - f(x)} \text{ и } t_2 = T - |\Delta_3|$$

Теорема. *Пусть* $|f(x^*)/g(x^*)| < 1$ *и* $T \geqslant |\Delta_1| + |\Delta_3|$, *где* Δ_1 *и* Δ_3 *определены с помощью уравнений, описанных в Замечании. Тогда оптимальное управление в исходной задаче имеет вид*

$$\hat{u} = (sign(x^* - x_0),\, u^*,\, sign(x_T - x^*)).$$

где $u^* = -f(x^*)/g(x^*)$. *Если* x_0 *или* x_T *совпадает с* x^*, *то соответствующий интервал (первый или последний) отсутствует.* Доказательство основано на теореме Чаплыгина [2].

Задача с внеинтегральным членом.

$$J = \int\limits_0^T e^{-rt}\, \Phi(x(t))\, dt \; + \; S(x(T)) \to \max.$$

$$\dot{x} = \; f(x) \; + \; u\, g(x), \qquad x(0) = x_0\,, \qquad |\, u| \leqslant 1.$$

Также как и исходная задача, эта задача всегда имеет решение. В дополнение к A1, A2 предположим, что

A3) Φ унимодулярна (с максимумом в точке x^*),

A4) Φ, S, f, g дифференцируемы и вогнуты по x,

A5) $S'(x) > 0$, $f'(x) > 0$, $g'(x) > 0$ для всех x.

Тогда оптимальное управление в задаче с внеинтегральным членом имеет вид:

1. если $x_0 < x^*$, то $\hat{u} = (1, u^*, sign(x_T - x^*))$ с точками переключения t_1 и t_2,
2. если $x_0 > x^*$, то $\hat{u} = (-1, u^*, sign(x_T - x^*))$ с точками переключения t_1 и t_2, или $\hat{u} = (-1, 1)$ с точкой переключения $\hat{t}_1 \leqslant t_1$.

В обоих случаях моменты t_1, t_2 определены соотношениями, описанными в Замечании.

Нестандартный случай. Рассмотрим исходную задачу, когда $u^* = -f(x^*)/g(x^*)$ "строго" недопустимо, т.е. когда $f(x^*)/g(x^*) > 1$ и нет возможности "стоять" в x^*. В этом случае движение по $[x_1, x_2]$ происходит с наименьшей возможной скоростью.

Теорема. *Пусть* $f(x^*)/g(x^*) > 1$. *Тогда* $\hat{u} = (1, -1, 1)$, *где точки переключения* $t_1 < t_2$ *однозначно определяются с помощью ПМП [1].* Также рассмотрен случай с внеинтегральным членом, и в нём траектория имеет качественно аналогичный вид.

Литература

1. Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V., Mischenko E.F.,*The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley, New York–London, 1962 (translated from Russian).
2. Tchaplygin S.A. "A new method for approximate integration of differential equations", *S.A. Tchaplygin. Collected works*, Nauka, Moscow, 1976, pp. 307–322 (in Russian).
3. Hartman P. *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York–London, 1964.
4. Filippov A.F. "On Some Questions of the Optimal Regulating Theory", *Vestnik Moscov. Univ, Ser. Math-Mech.,* 1959, No 2, pp. 25–32; English translation in *SIAM J. on Control*, 1962, v. 1, no. 1, pp. 76–84.

АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ НЕВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

OPTIMIZATION ALGORITHMS FOR NONCONVEX FUNCTIONALS

Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С., Аникин А.С., Финкельштейн Е.А.

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия

{gornov,tz,htower}@icc.ru, evgeniya.finkelstein@gmail.com

Численное решение сложных прикладных задач оптимального управления и параметрической идентификации продолжает оставаться серьезной проблемой.

С использованием современных и классических результатов теории оптимального управления, теории глобальной конечномерной оптимизации и теории эвристических поисковых методов реализовано несколько семейств алгоритмов, позволяющих численно исследовать задачи невыпуклой оптимизации управляемых динамических систем. Наряду с детерминированными алгоритмами, опирающимися на использование принципа максимума Понтрягина, методики овыпукления, последовательной дискретизации с последующей редукцией к задачам конечномерной оптимизации, рассматриваются стохастические подходы, опирающиеся на метод мультистарта, методы аппроксимации множества достижимости, алгоритмы криволинейного поиска, алгоритм Шепарда, эволюционные алгоритмы, методы случайных покрытий и другие [1], [2].

Проведено тщательное тестирование разработанных алгоритмов и вычислительных технологий с использованием регулярных методик тестирования и сформированной коллекции модельных задач.

На основе разработанных алгоритмов реализован ряд программных комплексов для задач оптимального управления: OPTCON-I,-II,-III, OPTCON-F и др. [3]. С применением реализованных алгоритмов решен ряд прикладных задач оптимизации из областей космонавигации, динамики полета, робототехники, нанофизики, моделирования композитных материалов, технической экологии, медицины, экономики, биологии, сейсмологии, географии и других [1], [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-07-03827.

Литература

1. Горнов А.Ю., *Вычислительные технологии решения задач оптимального управления*, Наука, (2009).
2. Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S., Finkelshtein E.A., Anikin A.S., "The Method of Uniform Monotonous Approximation of the Reachable Set Border for a Controllable System", *J Glob Optim*, 66, No. 1, 53–64 (2016).
3. Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С., Аникин А.С., Финкельштейн Е.А., Маджара Т.И., "Программные комплексы серии OPTCON для численного решения экстремальных задач", Труды X Международной Азиатской школы-семинара "Проблемы оптимизации сложных систем Кыргызская Республика, с. Булан-Соготту. 2014. Часть I, 233-235.
4. Горнов А.Ю., "Классификация проблем, возникающих при численном решении задач оптимального управления", *Вычислительные технологии*, 13, No. 1, 17–26 (2008).

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ НАВЕДЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ КВАДРОКОПТЕРА

AN ALGORITHM FOR CONSTRUCTING THE CONTROL IN THE GAME AIMING PROBLEM MODEL QUADROCOPTERS

Горьков В.П., Григоренко Н.Л., Румянцев А.Е.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия

v-p-gorkov@yandex.ru, grigor@cs.msu.su, rumiantcev@gmail.com

Постановка игровой задачи наведения для модели квадрокоптера. Рассматривается движение вектора (x, y, z, θ, ϕ) при воздействии вектора параметров помехи $v = (v_1, v_2, v_3)$ типа "люфт" [1] и вектора управляющих параметров $u = (u_1, u_2, u_3)$, подчиняющееся уравнениям :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) &= -u_1(t)v_1(t)\sin\theta(t), \\ \ddot{y}(t) &= u_1(t)v_1(t)\cos\theta(t)\sin\phi(t), \\ \ddot{z}(t) &= u_1(t)v_1(t)\cos\theta(t)\cos\phi(t) - g, \\ \ddot{\theta}(t) &= u_2(t)v_2(t), \\ \ddot{\phi}(t) &= u_3(t)v_3(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $t \in [0, T]$, $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ - управляющие параметры, измеримые по Лебегу функции, $0 \leqslant u_1 \leqslant \rho_1$, $|u_j| \leqslant \rho_j$, $j = 2, 3$;

$v_i(t) \in [\sigma_i, 1],\ 0 < \sigma_i \leqslant 1,\ i = 1, 2, 3,$ - параметр помехи, измеримая по Лебегу функция; σ_i, ρ_i - положительные константы.
Начальное положение системы (1) :

$$x(0) = x_0,\ y(0) = y_0, z(0) = z_0,\ \theta(0) = \theta_0,\ \phi(0) = \phi_0,$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0,\ \dot{z}(0) = \dot{z}_0,\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0,\ \dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0. \qquad (2)$$

Целевым множеством является $\ell > 0$ окрестность конечного положения:

$$x(T) = 0, y(T) = 0, z(T) = z_T, \theta(T) = 0, \phi(T) = 0,$$

$$\dot{x}(T) = 0,\ \dot{y}(T) = 0,\ \dot{z}(T) = 0,\ \dot{\theta}(T) = 0,\ \dot{\phi}(T) = 0. \qquad (3)$$

где T конечный нефиксированный момент времени.

Соотношения (1-3) определяют дифференциальную игру управляющего игрока, распоряжающегося выбором управлений $u_i, i = 1, 2, 3,$ при наличии вектора помехи $v = (v_i(t), i = 1, 2, 3)$. Целью управляющего игрока является приведение фазового вектора системы в ℓ окрестность конечного положения (3), при любой допустимой помехе.

Для достижения своей цели управляющий игрок располагает информацией об уравнениях игры (1), краевых условиях (2),(3) и в каждый момент времени t информацией о функциях $x(s), y(s), z(s), \theta(s)$,
$\varphi(s), s \in [0, t]$.

Игровая задача наведения для модели квадрокоптера состоит в нахождении для краевых условий (2),(3) параметров $T, \rho_j,\ \sigma_j,\ j = 1, 2, 3,\ \ell > 0$, для которых существует управление $u = (u_1, u_2, u_3)$, в классе позиционных управлений [1, 2], переводящее систему (1) из положения (2) в ℓ окрестность конечного положения (3) за время T, при любой допустимой реализации помехи и построении такого управления u.

В докладе приведены достаточные условия на параметры управляемого процесса (1), при которых существует управление u, гарантирующее окончание игры к моменту T. Описан способ построения такого управления в классе позиционных управлений. Предложен способ нахождения гарантированного времени окончания игры T. На основе полученных управлений предложена констукция пакета программ для одного класса задач управления с неполной информацией о фазовых переменных [2]. Приведены результаты расчетов траекторий фазовых переменных игры для модельных параметров системы [3].
Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 14-11-539).

Литература

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И., *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, (1974).
2. Осипов Ю. С., "Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией," *Успехи мат. наук.* Т. 61, вып. 4(370). С. 25–76. 2006.
3. Горьков В.П., Григоренко Н.Л., Румянцев А.Е., "Терминальное управление квадрокоптером при наличии помех," *Проблемы динамического управления: Сборник научных трудов факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова/ Под. ред. Ю.С. Осипова*, No. 7, с.5–19 (2016).

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ РАЗРАБОТКИ ОТКРЫТОГО КАРЬЕРА. ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ

GRADIENT PROJECTION METHOD APPLICATION TO THE OPEN PIT MINE OPTIMIZATION PROBLEM. 2D MODEL

Григоренко Н.Л., Камзолкин Д.В., Лукьянова Л.Н.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия

{grigor,kamzolkin,lln}@cs.msu.su

В работе рассмотрена двумерная модель открытого карьера, отражающая все особенности трехмерной модели, но позволяющая существенно понизить объем вычислений. Данная модель содержит уравнения в частных производных. С помощью дискретизации одной из фазовых переменных она сводится к задаче оптимального управления для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с интегральным показателем качества. Для решения последней задачи применяется метод проекции градиента.

Открытый карьер представляет собой трехмерное рудное тело, расположенное под землей и ограниченное некоторой областью, имеющей форму параллепипеда. Для получения двумерной модели отбрасывается одно из горизонтальных измерений и рассматривается плоский карьер, имеющий прямоугольную форму. В дальнейшем в модели может быть добавлено третье измерение с минимальными изменениями.

Вводится координатная система, связанная с рудным телом. Ось Ox направлена горизонтально, ось Oy – вниз. Рудное тело ограничено областью $0 \leqslant x \leqslant x_{max}$ и $0 \leqslant y \leqslant y_{max}$.

Вводим равномерную сетку на отрезке $[0, x_{max}]$ – $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ с шагом $\Delta = \frac{x_{max}}{N}$

Определим набор фазовых переменных, связанных с введенной сеткой:

$y_i(t)$ – грубина карьера в точке x_i в момент t,

и управляющие параметры:

$u_i(t)$ – скорость выкапывания в точке x_i в момент t,

$\rho_0(t)$ – минимальная концентрация полезных ископаемых в добываемой попроде при которой она отправляется на переработку.

Получаем следующую задачу оптимального управления

$$\begin{cases} \frac{dy_i(t)}{dt} = u_i(t), \quad t \in [0, T], \quad i \in \{1, N-1\}, \\ y_i(0) = 0, \quad i \in \{1, N-1\}, \\ y_0(t) = y_N(t) = 0, \quad t \in [0, T], \\ u_i(t) \geqslant 0, \quad t \in [0, T], \quad i \in \{1, N-1\}, \\ \rho_0(t) \geqslant 0, \quad t \in [0, T], \\ \sum\limits_{i=1}^{N-1} u_i(t) m \Delta \leqslant Q_{max}, \quad t \in [0, T], \\ \sum\limits_{i=1}^{N-1} u_i(t) m I(\rho_0(t), \rho(x_i, y_i(t))) \Delta \leqslant P_{max}, \quad t \in [0, T], \\ |y_{i+1}(t) - y_i(t)| \leqslant \Delta \tan \alpha_0, \quad t \in [0, T], \quad i \in \{0, N-1\}, \\ \int\limits_0^T e^{-\delta t} \sum\limits_{i=1}^{N-1} [-q + (s\rho(x_i, y_i(t)) - p) I(\rho_0(t), \rho(x_i, y_i(t)))] \cdot \\ \qquad u_i(t) m \Delta dt \to \max . \end{cases}$$

Здесь m – плотность породы,

$\rho(x, y)$ – концентрация полезных ископаемых в точке (x, y),

q – стоимость добычи единицы руды,

p – стоимость переработки единицы руды,

s – стоимость единицы полезных ископаемых,

Q_{max} – максимальная скорость копания,

P_{max} – максимальная скорость переработки,

T – фиксированное время разработки месторождения,

δ – коэффициент дисконтирования,

α_0 – максимальный угол наклона стенок карьера.

Индикаторная функция

$$I(\rho_0(t), \rho) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho \geqslant \rho_0(t), \\ 0, & \text{если } \rho < \rho_0(t). \end{cases}$$

позволяет определить отправлять ли руду на переработку (значение 1) или нет (значение 0) в зависимости от концентрации в ней полезных ископаемых.

Интегральный функционал представляет собой суммарную прибыль от разработки карьера, которую необходимо максимизировать.

Для решения поставленной задачи оптимального управления использовался метод проекции градиента. При этом фазовые граничения, задаваемые условиями на угол наклона стенок карьера, были учтены с помощью метода штрафных функций.

Проведен расчет модельного примера для двумерной блочной модели открытого карьера размером 50x20 блоков. На рисунке показана оптимальная форма карьера. Черным цветом отображаются блоки с нулевой концентраием полезного минерала.

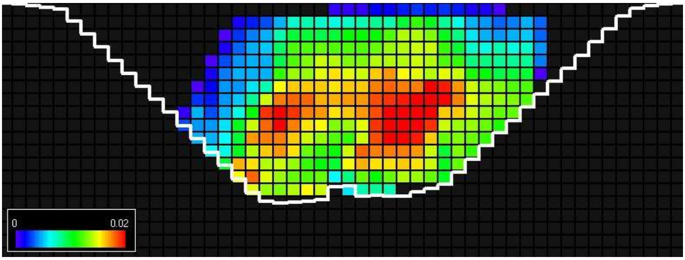

Рис. Оптимальная форма карьера

Литература

1. Григоренко Н.Л., Камзолкин Д.В., Лукьянова Л.Н. “Решение задачи максимизации прибыли при разработке открытого карьера,” *Проблемы динамического управления: Сборник научных трудов факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова*, том 6, 180–189 (2012).

СРЕДНЕВРЕМЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ И ЦИКЛИЧНОСТЬ

THE AVERAGE TIME OPTIMIZATION AND CYCLICITY

Давыдов А.А.

Научно-исследовательский технологический университет МИСиС,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Владимирский государственный университет

davydov@vlsu.ru

Получение максимальной среднего временного дохода от эксплуатации возобновляемого ресурса относится к важным практическим задачам. При учете дохода в натуральном выражении и полном восстановлении ресурса перед последующим проходом это приводит к задаче максимизации функционала

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T f(x(t))dt$$

по всем допустимым траекториям $x = x(t)$ управляемой системы, описывающей движение объекта, собирающего ресурс (см., например, [1], [2]). Здесь функция f доставляет плотность ресурса, а при отсутствии предела необходимо брать верхний предел.

В таких системах оптимальные траектории могут достаточно хорошо приближаться периодическими траекториями [3] или просто быть циклами [4], [5], в том числе при наличии дисконтирования по усилию или выгоде [6], [7].

Этим результатам, а также последним достижениям в оптимизации циклического сбора возобновляемого ресурса [8], [9] и будет посвящен доклад.

Работа выполнена при поддержке проекта 1.638.2016/ФПМ Министерства образования и науки Российской федерации и гранта 15-01-08075а Российского фонда фундаментальных исследований.

Литература

1. *Арнольд В.И.* Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах//Функц. анализ и его приложения. 2002. Т. 36, вып. 2. С. 1–11.
2. *Давыдов А. А.* Особенности типичного дохода в модели Арнольда циклических процессов//Тр. МИАН. 2005. Т. 250. С. 79–94.
3. *Colonius F., Kliemann F.* Infinite time optimal control and periodicity// Applied mathematics & optimization, 20 (1), 113-130.
4. *Давыдов А.А., Мена Матош Е.* Типичные фазовые переходы и особенности выгоды в модели Арнольда//Мат. сб. 2007. Т. 198, вып. 1. С. 21–42.
5. *Davydov A. A., Mena-Matos H.* Singularity theory approach to time averaged optimization// in SINGULARITIES IN GEOMETRY AND TOPOLOGY, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007, 598-628. 31/15,5 Мена Матош Е.
6. *Давыдов А. А., Шуткина Т. С.* Оптимизация циклического процесса с дисконтированием по его средней временной выгоде//УМН, 2009, 64:1(385), 143-144.
7. *Davydov A. A., Shutkina T. S.* Generic Profit Singularities of One-Parameter Cyclic Processes with Discount//J. Math. Sci, December 2013, Volume 195, Issue 3, pp 288-298

8. *Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.M.* Optimal cyclic exploitation of renewable resources // J. Dyn. Control Syst. 2015. Vol. 21, no. 3. P. 475–494
9. *Беляков А. О., Давыдов А. А.* Оптимизация эффективности использования возобновляемого ресурса. 2016. Труды ИММ УрО РАН. Т. 22, № 2. С. 38-46.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

NECESSARY CONDITIONS IN OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH INTEGRAL EQUATIONS

Дмитрук А.В.

МГУ, кафедра оптимального управления, Москва, Россия, Центральный экономико-математический институт РАН, Москва

dmitruk@member.ams.org

1. На фиксированном отрезке времени $[0,T]$ рассмотрим управляемую систему интегральных уравнений типа Вольтерры:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(t,s,x(s),u(s))\,ds, \tag{1}$$

где $x(\cdot)$ – непрерывная $n-$мерная, $u(\cdot)$ – измеримая ограниченная $r-$мерная вектор-функции. Среди решений системы (1), удовлетворяющих концевым ограничениям равенства $\eta_j(x(0),x(T)) = 0,$ и неравенства $\varphi_i(x(0),x(T)) \leqslant 0$, а также фазовым $\Phi_k(t,x(t)) \leqslant 0$ и смешанным ограничениям $F_i(t,x(t),u(t)) \leqslant 0,\ G_j(t,x(t),u(t)) = 0$, требуется минимизировать концевой функционал: $J = \varphi_0(x(0), x(T)) \to \min$. Будем называть это задачей А.

Как и в классической задаче Лагранжа, будем говорить, что допустимый процесс $\hat{w} = (\hat{x},\hat{u})$ доставляет *слабый минимум*, если $\exists\,\varepsilon > 0$ такое, что для любого допустимого процесса $w = (x,u)$, у которого $||x-\hat{x}||_C < \varepsilon$ и $||u-\hat{u}||_\infty < \varepsilon,$ выполнено неравенство $J(w) \geqslant J(\hat{w})$.

Наша первая цель — получить необходимые условия первого порядка для *слабого минимума* (условия стационарности) в задаче А. Будем считать, что концы исследуемой траектории $\hat{x}(t)$ не лежат на фазовых границах, т.е. что все $\Phi_k(0,\hat{x}(0)) < 0,$ $\Phi_k(T,\hat{x}(T)) < 0.$

Кроме того, будем предполагать, что смешанные ограничения *регулярны.* Последнее означает, что в любой точке (t,x,u), удовлетворяющей этим ограничениям, градиенты по u ограничений равенства $G'_{ju}(t,x,u)$ и активных ограничений неравенства $F'_{iu}(t,x,u)$ *линейно-позитивно независимы.*

Задача А есть частный случай общей негладкой задачи в банаховом пространстве с ограничениями равенства и неравенства, поэтому можно пользоваться абстрактным правилом множителей Лагранжа. Его расшифровка для задачи А приводит к следующему результату.

Пусть $(\alpha_i,\, \beta_j,\, h_i,\, m_j,\, \mu_k, \psi)$ есть набор множителей Лагранжа, где $\alpha_i \geqslant 0$, β_j – числа, $h_i(s) \geqslant 0$, $m_j(s)$ – измеримые ограниченные функции, $\mu_k(t)$ – неубывающие функции, непрерывные в концах отрезка, $\psi(t)$ – функция ограниченной вариации, также непрерывная в концах отрезка. Ему соответствует концевая функция Лагранжа $l(x_0,x_T) = \big(\sum \alpha_i\varphi_i + \sum \beta_j\eta_j\big)(x_0,x_T)$, модифицированная функция Понтрягина

$$H(s,x,u) = \psi(s)f(s,s,x,u) + \int_s^T \psi(t)\, f_t(t,s,x,u)\, dt, \qquad (2)$$

и расширенная модифицированная функция Понтрягина

$$\overline{H}(s,x,u) = H(s,x,u) - \\ - \sum_i h_i(s)\, F_i(s,x,u) - \sum_j m_j(s)\, G_j(s,x,u) - \sum_k \dot\mu_k(s)\, \Phi_k(s,x(s)).$$

Отметим, что в отличие от обычной функции Понтрягина для задач с ОДУ, функция H здесь требует для своего определения знания функции $\psi(t)$, а не вектора ψ. В случае, когда f не зависит от первого аргумента (что соответствует ОДУ), интеграл в формуле (2) исчезает и функция H приобретает обычный вид.

Теорема. Пусть процесс $\hat w = (\hat x, \hat u)$ доставляет слабый минимум в задаче А. Тогда найдется нетривиальный набор указанных множителей, для которого выполнены концевые условия дополняющей нежесткости, поточечные условия дополняющей нежесткости

$$d\mu_k(t)\, \Phi_k(t,\hat x(t)) \equiv 0, \qquad h_i(s)\, F_i(s,\hat x(s),\hat u(s)) = 0,$$

трансверсальности $\psi(0) = l_{x(0)}$, $\psi(T) = -l_{x(T)}$, стационарности по управлению $\overline{H}_u(s,\hat x(s),\hat u(s)) = 0$, и сопряженное уравнение

$$\dot\psi(s) = -\overline{H}_x(s,\hat x(s),\hat u(s)). \qquad (3)$$

Последнее уравнение можно понимать как равенство мер:

$$d\psi(s) = -H_x(s, \hat{x}(s), \hat{u}(s))\, ds \ + \sum_i h_i(s)\, F_{ix}(s, \hat{x}(s), \hat{u}(s))\, ds + \\ + \sum_j m_j(s)\, G_{jx}(s, \hat{x}(s), \hat{u}(s))\, ds \ + \sum_k d\mu_k(s)\, \Phi_k(s, \hat{x}(s)).$$

Отметим следующее обстоятельство, касающееся задач с интегральными уравнениями, даже при отсутствии фазовых и смешанных ограничений. Если в случае ОДУ необходимое условие представляет собой краевую задачу для пары ψ, x (при теоретической возможности исключения управления с помощью условия $H_u = 0$), то здесь для определения ψ, x, u, вместе с условием $H_u = 0$ и условиями трансверсальности мы получаем краевую задачу для пары интегральных уравнений типа Вольтерры (1) и (3), "решаемых" *в противоположных направлениях*. Фактически, мы получаем систему уравнений типа Фредгольма некоторого специального вида. Процедура использования подобных условий не очевидна и нуждается в дополнительной разработке.

2. Переходя от слабого минимума к *сильному*, можно получить обобщение ПМ Понтрягина. Для этого от системы (1) надо перейти к ее расширению (овыпуклению правой части) с помощью т.н. скользящих режимов и установить корректность такого расширения, а именно, что *траектория расширенной системы может быть приближена траекториями исходной системы (1), удовлетворяющими тем же нелинейным концевым ограничениям равенства*. Тогда из сильного минимума в исходной задаче вытекает наличие слабого минимума для соответствующего процесса в расширенной задаче, поэтому для последнего должны выполняться полученные ранее условия стационарности. Переформулировка этих условий позволяет получить принцип максимума для исследуемого процесса в исходной задаче.

3. Задача на нефиксированном времени $[t_0, t_1]$ может быть сведена к задаче на фиксированном времени, но при этом мы получаем управляемую систему следующего вида относительно пары функций $x(t)$, $y(t)$, выходящую за рамки системы типа Вольтерры:

$$x(t) = \ x(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(t, s, y(t), x(s), y(s), u(s))\, ds,$$

$$y(t) = \ y(t_0) + \int_{t_0}^{t} h(t, s, y(s), u(s))\, ds.$$

В сопряженном уравнении и условии трансверсальности по времени появляются новые члены, которых не было в задачах с ОДУ или с интегральным уравнением (1).

Доклад основан на совместных работах с Н.П. Осмоловским.

Литература

1. Дмитрук А.В., "Аппроксимационная теорема для нелинейной управляемой системы со скользящими режимами", *Труды МИРАН,* т. 256 (2007).
2. Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P., "Necessary conditions for a weak minimum in optimal control problems with integral equations subject to state and mixed constraints", *SIAM J. on Control and Optimization,* v. 52, no. 6.
3. Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P., "Necessary conditions for a weak minimum in optimal control problems with integral equations on a variable time interval", *Discrete and Continuous Dynamical Systems, ser. A,* v. 35, no. 9.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ В ПРИСУТСТВИИ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ

NUMERICAL SOLUTION TO SOME BOUNDARY CONTROL PROBLEMS FOR WAVE EQUATION IN THE PRESENCE OF UNCERTAINTY

Дряженков А.А.

Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

andrja@yandex.ru

В докладе рассматриваются задачи граничного управления для волнового уравнения следующего вида:

$$\begin{gathered} y_{tt} = y_{xx} - q(x)\, y, \quad (t,x) \in Q = (0,T) \times (0,l), \\ -y_x + \sigma_0 y\,|_{x=0} = u(t), \quad y_x + \sigma_1 y\,|_{x=l} = 0, \quad 0 < t < T, \\ y\,|_{t=0} = v^0(x), \quad y_t\,|_{t=0} = v^1(x), \quad 0 < x < l. \end{gathered} \tag{1}$$

Коэффициент $q(x)$ предполагается непрерывным, а параметры задачи T, l, $q(x)$ заданными. Следуя [1], задача (1) рассматривается в двух классах обобщённых решений: сильном и слабом. Класс решений $y(t,x)$ определяет пространства, которым принадлежат управление $u(t)$ и начальное состояние $v(x) = \big(v^0(x), v^1(x)\big)$. Сильному обобщённому решению задачи соответствуют пространства

$$u \in H = L^2(0,T), \quad v \in F = H^1(0,l) \times L^2(0,l), \tag{2}$$

где через $L^2(0,T)$ обозначено пространство Лебега интегрируемых в квадрате измеримых функций, а $H^1(0,T) = W_2^1(0,T)$ — пространство Соболева, включающее функции, имеющие первую обобщённую производную из $L^2(0,T)$. Слабому обобщённому решению соответствуют пространства

$$u \in H = \big(H^1(0,T)\big)^*, \quad v \in F = L^2(0,l) \times \big(H^1(0,l)\big)^*. \tag{3}$$

Целью применения управления $u(t)$ является перевод системы из начального состояния $v(x)$ в состояние покоя в конечный момент времени T:

$$y\,|_{t=T} = 0, \quad y_t\,|_{t=T} = 0, \quad 0 < x < l. \tag{4}$$

В том случае, когда начальное состояние $v(x)$ известно, управление $u(t)$, решающее задачу (1), (4), может быть численно найдено с помощью вариационного метода М.М. Потапова [1; 2].

Особенностью постановки задачи управления (1), (4) в данной работе является неизвестность $v \in F$ управляющей стороне. Вместо этого предполагается, что ей в режиме реального времени становятся доступными данные граничного наблюдения $g(t)$ на управляемом краю:

$$y\,|_{x=0} = g(t), \quad 0 < t < T, \tag{5}$$

т. е. на управление накладывается условие неупреждаемости относительно наблюдения $g(t)$. Разрешимость задачи (1), (4), (5) понимается аналогично [3], но при этом дополнительно накладывается требование сходимости по норме пространства H кусочно построенных управлений $\widetilde{u}(t)$ к некоторому управлению $u(t)$, решающему задачу (1), (4).

В данной работе задача (1), (4), (5) была исследована для двух случаев. В первом случае предполагалось, что коэффициенты σ_0 и σ_1, входящие в граничные условия, известны управляющей стороне. Были доказаны следующие два результата о разрешимости рассматриваемой задачи позиционного управления с неполной информацией.

Теорема 1. *Пусть* $T \geqslant 4l$ *и функциональные классы управлений и начальных состояний выбраны по правилу* (2) *или* (3). *Тогда задача позиционного управления* (1), (4), (5) *имеет решение.*

Теорема 2. *Пусть* $T < 4l$, $q(x) \equiv 0$ *и функциональные классы управлений и начальных состояний выбраны по правилу* (2) *или* (3). *Тогда задача позиционного управления не разрешима.*

Замечание 1. Как гипотезу автор может заявить справедливость теоремы 2 и для случая общего положения $q(x) \not\equiv 0$.

В случае $T \geqslant 4l$ предложены алгоритмы численного построения стратегий, решающих рассматриваемую задачу. Результаты для случая сильных обобщённых решений были опубликованы в [4], а для случая слабых обобщённых решений в более слабой, чем приведённая здесь, формулировке — в [5].

Вторым случаем, рассмотренным в работе, является случай неизвестных коэффициентов σ_0 и σ_1. В этом случае для $T > 4l$ и сильных обобщённых решений (1) доказана разрешимость задачи (1), (4), (5) и предложен численный метод её решения, выходом которого также являются и приближения к неизвестным коэффициентам.

Замечание 2. Разрешимость задачи для $T = 4l$ и неизвестных коэффициентов σ_0, σ_1 остаётся открытым вопросом.

Литература

1. Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М., Разгулин А.В. *Приближённое решение двойственных задач управления и наблюдения*, МАКС Пресс, (2010).
2. Потапов М.М., “Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущённым оператором,” *Доклады АН*, 365, No. 5, 596–598 (1999).
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, (1974).
4. Дряженков А.А., Потапов М.М., “Численное решение задачи позиционного граничного управления для волнового уравнения с неизвестными начальными данными,” *Труды ИММ УрО РАН*, 22, No. 2, 138–146 (2016).
5. Дряженков А.А., Потапов М.М., “Численное решение одной задачи гарантирующего управления для волнового уравнения в классах слабых обобщённых решений,” *Материалы XIII Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого)*, 146–148 (2016).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗОЛОТОГО ПРАВИЛА НРАВСТВЕННОСТИ

MATHEMATICAL MODEL OF THE GOLDEN RULE

Жуковский В.И., Горбатов А.С.

МГУ, Москва, Россия

zhkvlad@yandex.ru, gorbatovanton@gmail.com

Формулировка Золотого правила нравственности (ЗПН): «Поступай по отношению к другому так, как ты хочешь, чтобы он поступил по отношению к тебе». Оно является одним из самых древних, распространенных и специфичных нравственных требований и акцентируется в христианстве, исламе, иудаизме, буддизме и конфуцианстве. В России теоретические исследования ЗПН возглавляет академик А.А. Гусейнов [1]. ЗНП естественно использовать при тушении, уравновешивании конфликтов, а его «альтруистический характер» при этом заведомо исключает войны, кровопролития, вооруженные столкновения.

Мы предлагаем в качестве математической модели ЗПН использовать концепцию равновесия по Бержу (BE — Berge equilibrium). BE появилось в России в 1995 году при критическом обсуждении книги Клода Бержа [4], отсюда и название «Равновесие по Бержу». В 1995 году К.С. Вайсман (тогда аспирант Жуковского В.И.) в Санкт-Петербургском университете на факультете ПМиПУ защитил кандидатскую диссертацию «Равновесие по Брежу». В дальнейшем это понятие получило широкое распространение у наших иностранных коллег. Количество публикаций монотонно растет из года в год [5]. Предлагаемая нами теория BE делиться на статический и динамический варианты.

Статический вариант. Для бескоалиционной игры N лиц в нормальной форме

$$\Gamma =< \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} >,$$

где $\mathbb{N} = \{1, \ldots, N\}$; чистые стратегии i-ого игрока $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$; ситуация $x = (x_1, \ldots, x_N) \in X = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$; $f_i(x)$ — функция выигрыша i-ого игрока; $(x||z_i) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \ldots, x_N) \in X$.

Ситуация $x^B \in X$ *равновесна по Бержу* в Γ, если

$$f_i(x||x_i^B) \leqslant f_i(x^B) \quad \forall x \in X, i \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Так как X^B — множество BE внутренне не устойчиво (могут $\exists\ x^{(1)}, x^{(2)} \in X^B : f_i(x^{(1)}) > f_i(x^{(2)})\ (\forall i \in \mathbb{N})$), то формализуем SBE — слабо эффективное BE, добавляя к требованию (1) слабую эффективность (максимальность по Слейтеру) по отношению к остальным ситуациям из X^B, множества ситуаций, из X^B, «нагруженных» дополнительно требованием слабой эффективности, обозначим X^{SB}. Свойства X^{SB}:

1) $X^{SB} \in compX$ (хотя может быть $X^{SB} = \emptyset$), если $X_i \in comp\mathbb{R}^{n_i}$ и $f_i(\cdot) \in C(X)$ $(i \in \mathbb{N})$ [1];

2) достаточные условия: $\exists x^{SB}$ сводится к $\exists$ седловой точки специальной гермейеровской свертки функции выигрыша [2];

3) SBE в Γ существует в смешанных стратегиях, если $X_i \in comp\mathbb{R}^{n_i}$, $f_i(\cdot) \in C(X)$ $(i \in \mathbb{N})$ (аналог теоремы Гликсберга для равновесия по Нэшу) [2];

4) аналогичные результаты получены в [6] для игры Γ при учете неопределенностей $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$, т.е. для

$$\Gamma_U =< \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, Y^X, \{f_i(x,y)\}_{i\in\mathbb{N}} >;$$

5) в моделях олигополии Курно и Бертрана выделены случаи, когда применение BE доставляет всем игрокам большие выигрыши, чем NE [1].

Динамический вариант. Основой исследования здесь явились три фактора: **a)** модернизация математической формализации по Н.Н. Красовскому дифференциальной позиционной игры (ДПИ) в связи с контрпримерами А.И. Субботина и А.Ф. Кононенко [7],
b) предложенный Н.Н. Красовским метод «управления с поводырем»,
c) гермейеровская свертка функций выигрыша игроков.

Результаты: 1^0) выделен класс дифференциальных игр с «разделенной динамикой», в котором существуют BE [8],
2^0) для ряда линейно-квадратичных ДПИ построены коэффициентные условия $\exists$ BE;
3^0) для многошаговых моделей дуополии Курно и Бертрана с помощью модификации метода динамического программирования найдены BE.

В настоящее время организуется коллектив из представителей России, Франции, Украины и Алжира для совместных теоретических исследований BE.

Литература

1. Гусейнов А.А., Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. , *Математические основы Золотого правила нравственности: Теория нового альтруистического уравновешивания конфликтов в противоположность*

«эгоистическому» равновесию по Нэшу., М.: URSS, (2016). (Relato Refero).
2. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., “Математические основы Золотого правила нравственности. I. Статический вариант,” *Математическая теория игр и приложения*, 7, No. 3, 16-47 (2015).
3. Жуковский В.И., Смирнова Л.В., Горбатов А.С. , “Математические основы Золотого правила нравственности. II. Динамический вариант,” *Математическая теория игр и приложения*, 8, No. 1, 27-62 (2016).
4. Berge C., *Théorie générale des jeux a n-personnes*, Paris: Gauthier Villars, (1957).
5. Larbani M., Zhukovskiy V.I., “Berge-Equilibrium in Normal Form Games: a literature review,” *International Game theory review* (in Press, 43p).
6. Zhukovskiy V.I., Chikrii A.A., Soldatova N.G., “Existence of Berge Equilibrium in Conflicts under Uncertainty,” *Automation and Remote Control*, 77, No. 4, 607–622 (2016).
7. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E., *The Vector-Valued Maximum*, N.Y. etc.: Academic Press, (1994).
8. Zhukovskiy V.I., Topchishvili A.L., “Mathematical Model of Golden Rule in the Form Differential Positional Game of many Persons,” *Model Assisted Statistics and Application*, 17, (in Press, 30p).

ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

OPTIMAL TIME BOUNDARY CONTROL PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION

Иванов Д.А.

МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, Москва, Россия

deniaru91@gmail.com

Для волнового уравнения рассмотрены задачи быстродействия с двусторонними граничными управлениями трех основных типов в классах сильных и слабых обобщенных решений. Для устойчивого приближенного вычисления времени быстродействия и оптимальных граничных управлений разработаны алгоритмы, вырабатывающие приближенные решения, обладающие свойствами устойчивости и сходимости при асимптотическом уточнении параметров конечномерной аппроксимации и уменьшении уровня погрешности в задании целевых функций.

В работе исследуются задачи быстродействия для волнового уравнения с двусторонними граничными управлениями:

$$\begin{gathered}y_{tt} = y_{xx} - \theta(x)\,y, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\ -\beta_0 y_x + \sigma_0 y\,|_{\,x=0} = u_0(t), \quad \beta_1 y_x + \sigma_1 y\,|_{\,x=l} = u_1(t), \quad t > 0,\\ y\,|_{\,t=0} = 0, \quad y_t\,|_{\,t=0} = 0, \quad 0 < x < l,\\ T_\star = \inf_{T>0} T: \quad y\,|_{\,t=T} = f^0(x), \quad y_t\,|_{\,t=T} = f^1(x), \quad 0 < x < l.\end{gathered}$$

Для каждого фиксированного целевого состояния $f = (f^0(x), f^1(x))$ требуется найти пару граничных управлений $u_\star = (u_{0\star}(t), u_{1\star}(t))$, обеспечивающих точное попадание в заданную цель f за *наименьшее* время $T_\star = T_\star(f)$. Параметры l, β_0, β_1, σ_0, σ_1 и функция $\theta(x)$ предполагаются заданными, причем

$$l > 0, \quad \beta_i = 0 \vee 1, \quad \beta_i + |\sigma_i| > 0, \;\; i = 0, 1, \quad \theta(x) \in C[0, l].$$

В качестве пространства целевых состояний $f = (f^0(x), f^1(x))$ в случае сильных обобщенных решений выбирается множество

$$F = H^1(0,l) \times L^2(0,l),$$

а в случае слабых обобщенных решений — множество

$$F = L^2(0,l) \times (F^1)^*,$$

где пространство F^1 целевых скоростей зависит от типа граничных условий:

$$F^1 = \big\{ f(x) \in H^1(0,l) \,\big|\; (1-\beta_0)\, f(0) = 0, \;\; (1-\beta_1)\, f(l) = 0 \big\}.$$

Для класса сильных обобщенных решений в работе [1] предложен двухэтапный алгоритм приближенного решения задачи, способный устойчиво обрабатывать неточные данные $\widetilde{f} = (\widetilde{f}^0, \widetilde{f}^1) \in F$ с погрешностями известного уровня $\delta > 0 : \|\widetilde{f} - f\|_F \leqslant \delta$.

На первом этапе по доступным для обработки данным $\widetilde{f}$, δ вычисляется приближенное время быстродействия $\widetilde{T}_\star = \widetilde{T}_\star(\widetilde{f}, \delta)$ с помощью подходящих конечномерных аппроксимаций дифференциальных связей и соответствующих априорных оценок возникающих при этом погрешностей. Предложена естественная модификация алгоритма поиска времени быстродействия, ориентированная на классы слабых обобщенных решений.

На втором этапе с помощью вариационного метода [2], использующего явные выражения оценочных констант, полученных в [3, 4], и уже найденное значение $\widetilde{T}_\star(\widetilde{f}, \delta)$, строятся приближения $\widetilde{u}_\star$ к оптимальным по времени точным граничным управлениям $u_\star$. При этом различия между классами сильных и слабых обобщенных решений, как в конструкциях приближенных управлений $\widetilde{u}_\star$, так и в доказательстве их сходимости к точным управлениям $u_\star$, оказываются более существенными.

Приводятся результаты численных экспериментов, иллюстрирующие возможности предложенных алгоритмов.

Литература

1. Иванов Д.А., Потапов М.М., "Приближенное решение задачи быстродействия для волнового уравнения с граничными управлениями," *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова.*, 291, 112-127 (2015).
2. Потапов М.М., "Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущенным оператором," *Докл. РАН.*, 365, No. 5, 596-598 (1999).
3. Потапов М.М., Иванов Д.А., "Задачи двустороннего граничного управления для волнового уравнения на докритических промежутках в классах сильных обобщенных решений," *Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН.*, 19, No. 4. 192-202 (2013).
4. Иванов Д.А., Потапов М.М., "Непрерывная обратимость оператора граничного управления для волнового уравнения на докритических промежутках в классах слабых обобщенных решений," *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, No. 4. 5-12 (2014).

ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

THEORY AND NUMERICAL METHODS OF SOLVING INVERSE PROBLEMS FOR HYPERBOLIC EQUATIONS

Кабанихин С.И., Шишленин М.А.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия
Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

kabanikhin@sscc.ru, mshishlenin@ngs.ru

Коэффициентные обратные задачи для гиперболических уравнений имеют большое значение в сейсмике, акустике, электродинамике, поскольку позволяют определить неизвестные свойста среды, тьакие как плотность, скорость распространения волн, проводимость, диэлектрическую проницаемость и т.д. Эти задачи не являются классически корректными и требуют специальных методов регуляризации.

Методы решения обратных задач для гиперболических уравнений можно разделить на две основные группы — прямые и итерационные [2]. К прямым отнесятся методы линеаризации, обращения конечно-разностных схем, И.М.Гельфанда, Б.М. Левитана и М.Г. Крейна, граничного управления и сингулярного разложения. Прямые методы позволяют определить неизвестные коэффициенты в фиксированной точке среды в случае, когда дополнительная информация задана в виде следа решения прямой задачи на времениподобной поверхности (например, на поверхности Земли). Прямые методы решения являются наиболее перспективными, поскольку в итерационных алгоритмах (методы градиентного спуска, метод Ньютона-Канторовича и др.) необходимо многократно решать соответствующие прямые и сопряженные задачи, что в многомерном случае является достаточно сложной проблемой. Преимущество прямых методов заключается также в том, что допускают распараллеливание.

В качестве примера рассмотрим задачу определения плотности среды $\rho(x, y)$, предполагая, что скорость распространения волн равна 1.

Прямая задача. Рассмотрим уравнение акустики в полупространстве $x > 0$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ и предположим, что к моменту времени $t = 0$ среда находилась в покое

$$\frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial t^2} = \Delta u^{(k)} - \nabla \ln \rho(x, y) \, \nabla u^{(k)}, \tag{1}$$

$$u^{(k)}\big|_{t<0} \equiv 0. \tag{2}$$

Здесь $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

Предполагается, что среда зондируется последовательностью источников

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}(+0, y, t) = h^{(k)}(y)\delta(t), \qquad y \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z}^2. \tag{3}$$

Здесь $\delta(t)$ – дельта функция Дирака.

В *обратной задаче* необходимо определить $\rho(x, y)$, если о решении прямой задачи известна дополнительная информация (площадная система измерений)

$$u^{(k)}\big|_{x=+0} = f^{(k)}(y, t), \qquad y \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z}^2. \tag{4}$$

Нелинейная коэффициентная обратная задача (1)—(4) сводится к системе линейных интегральных уравнений (многомерный аналог уравнения М.Г. Крейна) [1]:

$$2\Phi^{(k)}(x,t) - \sum_{m\in\mathbb{Z}^2} \int\limits_{-x}^{x} (f_m^{(k)})'(t-s)\Phi^{(m)}(x,s)ds = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k,y)}}{\rho(0,y)}\mathrm{d}y. \quad (5)$$

Здесь $k \in \mathbb{Z}^2$, $(f_m^{(k)})'(t)$ — коэффициенты Фурье функции $f^{(k)}(y,t)$.

Для каждого фиксированного значения x система уравнений (5) является системой линейных интегральных уравнений второго рода.

Решение обратной задачи $\rho(x,y)$ можно определить по формуле

$$\rho(x,y) = \frac{\pi^2}{\rho(0,y)}\Big[\sum_{m\in\mathbb{Z}^2} \Phi^{(m)}(x, x-0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m,y)}\Big]^{-2}. \quad (6)$$

Для того, чтобы найти решение $\rho(x,y)$ обратной задачи в точке $x_0 > 0$, необходимо решить систему (5) полагая $x = x_0$, и вычислить решение $\rho(x_0,y)$ по формуле (6).

Для решения уравнения М.Г. Крейна применены метод сингулярного разложения [2,3], методы Монте-Карло [4,5], супербыстрый алгоритм обращения блочно-теплицевых матриц больших размерностей [6].

В докладе будут изложены основные теоретические результаты (теоремы единственности и условной устойчивости, сходимость итерационных алгоритмов) и представлены результаты численных расчетов.

Работа поддержана РФФИ (проекты 14-01-00208, 15-01-09230, 16-01-00755), Министерством образования и науки Российской Федерации и Министерства образования и науки Республики Казахстан (название проекта “Выявление и изучение геофизическими методами проницаемых структур верхней части разреза Семипалатинского испытательного полигона в целях повышения геоэкологической безопасности”).

Литература

1. Кабанихин С.И. “О линейной регуляризации многомерных обратных задач для гиперболических уравнений,” *Доклады РАН*, 309, No. 4, 791–795 (1989).

2. Kabanikhin, S. I., Satybaev, A. D., Shishlenin, M. A. *Direct Methods of Solving Inverse Hyperbolc Problems*, VSP, Utrecht, (2004).

3. Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. “Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gelfand-Levitan-Krein equation,” *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 18, No. 9, 979–996 (2011).

4. Kabanikhin S.I., Sabelfeld K.K., Novikov N.S., Shishlenin M.A. “Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods,” *Monte Carlo Methods and Applications*, 21, No. 3, 189–203 (2015).

5. Kabanikhin S.I., Sabelfeld K.K., Novikov N.S., Shishlenin M.A. “Numerical solution of the multidimensional Gelfand–Levitan equation,” *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 23, No. 5, 439–450 (2015).

6. Kabanikhin S.I., Novikov N.S., Oseledets I.V., Shishlenin M.A. “Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problem,” *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 23, No. 6, 687–700 (2015).

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В ДВУХСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ФУНКЦИОНАЛОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ АМОРТИЗАЦИИ: ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

OPTIMAL RESOURCE ALLOCATION PROBLEM IN TWO SECTOR ECONOMIC MODEL WITH INTEGRAL TYPE COST AND DIFFERENT AMORTIZATION COEFFICIENTS: THEORETICAL ANALYSIS AND NUMERICAL EXPERIMENTS

Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В., Орлов С.М.

Факультет ВМК МГУ, Москва, Россия

{kiselev,asn,orlov,sergey.orlov}@cs.msu.su

Рассматривается задача распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с двухфакторной производственной функцией Кобба–Дугласа при различных коэффициентах амортизации на конечном горизонте времени с функционалом интегрального типа. Задача приводится к некоторой канонической форме масштабированием фазовых переменных и времени. Устанавливается оптимальность экстремального решения, построенного на основе принципа максимума. При достаточно большом горизонте планирования оптимальное управление имеет две или три точки переключения, содержит один особый участок и равно нулю на финальном участке. Интересно отметить, что между особым участком, где движение идёт по особому лучу, и финальным участком существует переходный «калибровочный» режим, чего не отмечалось ранее при исследованиях похожих процессов. Решение краевой задачи принципа максимума предъявляется в явном виде для случая, когда начальное состояние объекта лежит ниже особого луча. Теоретические результаты дополняются графическими иллюстрациями на основе численных расчётов.

В докладе представлены перечисленные ниже вопросы.

1. Постановка задачи (каноническая форма). Изучается двумерная задача оптимального управления на конечном отрезке времени

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{u_1}{\varepsilon_1} F(x) - \mu_1 x_1, \qquad x_1(0) = x_{10} > 0, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{u_2}{\varepsilon_2} F(x) - \mu_2 x_2, \qquad x_2(0) = x_{20} > 0, \\ J \equiv \displaystyle\int_0^T e^{-\nu t} (1 - u_1 - u_2) F(x)\, dt \to \max_{u(\cdot)}, \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_+, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u \in U = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \colon u_1 \geqslant 0,\ u_2 \geqslant 0,\ u_1 + u_2 \leqslant 1 \right\}, \end{cases} \tag{1}$$

где x_1, x_2 — положительные фазовые переменные, u_1, u_2 — координаты управления $u = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right)$, подчинённого геометрическому ограничению $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^2$, где область управления U является треугольником, $x^0 = \left(\begin{smallmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2_+$ — начальное состояние управляемого объекта, длительность процесса управления $T > 0$ — заданный параметр. В дифференциальных уравнениях управляемого движения участвует функция

$$F(x) = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2^+,$$

— производственная функция Кобба–Дугласа, в которой коэффициенты эластичности ε_1, ε_2, удовлетворяют условиям:

$$\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0,\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1,$$

μ_1, μ_2 — положительные коэффициенты амортизации. Коэффициент дисконтирования $\nu > 0$. Фазовые переменные характеризуют уровень развития двух секторов экономики, а функционал — интегральный объём потребления на отрезке времени $[0, T]$ с учётом дисконтирования. Набор исходных данных задачи управления (1) состоит из положительных чисел ν, μ_1, μ_2, x_{10}, x_{20}, T и параметров ε_1 и ε_2. Длительность T горизонта планирования предполагается «достаточно большой». Данная работа примыкает к статьям [2]–[7]. Случай $\mu_1 = \mu_2$ задачи (1) был изучен ранее. Переход к случаю $\mu_1 \neq \mu_2$ оказался нетривиальным.

2. Анализ канонической задачи с помощью принципа максимума Понтрягина (ПМП). Вычисление возможных особых режимов. Краевая задача ПМП. Обоснование оптимальности экстремального решения.

3. Анализ дифференциальных уравнений движения и сопряжённых уравнений при различных режимах управления.

4. Формулировка теоремы об оптимальном решении задачи (1). Конструктивное описание оптимального решения.

5. Вычислительный эксперимент.

По теме доклада подготовлена статья с подробным изложением полученных результатов.

Работа поддержана грантом РФФИ 16-31-00177 мол_а

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. М.: Наука. (1961).
2. Киселёв Ю.Н. “Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина”, *Математические модели в экономике и биологии: Материалы научного семинара*. Планерное Московской обл. М.: МАКС Пресс, 57-67 (2003).
3. Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н. “Некоторые алгоритмы оптимального управления”, *Труды Института Математики и Механики УрО РАН*, 12, №2, 3-17 (2006).
4. Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н., Орлов М.В., Тарасьев А.М. “Задача максимизации прибыли для производственных функций Кобба–Дугласа и CES” *Сб. Нелинейная динамика и управление под ред. С. В. Емельянова, С. К. Коровина*, 5, 309-350 (2007).
5. Киселёв Ю.Н., Орлов М.В. “Оптимальная программа распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией Кобба–Дугласа”, *Дифференциальные уравнения*, 46, №12, 1749-1765 (2010).

6. Киселёв Ю.Н., Орлов М.В. “Оптимальная программа распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией Кобба–Дугласа при различных коэффициентах амортизации”, *Дифференциальные уравнения*, 48, №12, 1642-1657 (2012).
7. Киселёв Ю.Н., Орлов М.В., Орлов С.М. “Исследование двухсекторной экономической модели с функционалом интегрального типа”, *Вестник Москов. ун-та. Сер. 15. ВМиК*, №4, 27-37 (2013).

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОМЕРНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ КОББА–ДУГЛАСА

INVESTIGATION OF MULTIDIMENSIONAL ECONOMIC MODEL WITH COBB–DOUGLAS PRODUCTION FUNCTION

Киселёв Ю.Н., Орлов М.В., Орлов С.М.

Факультет ВМК МГУ, Москва, Россия

{kiselev,orlov,sergey.orlov}@cs.msu.su

Рассмотрим нелинейную задачу оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dfrac{u_i}{\varepsilon_i}\, F(x), \qquad x_i(0) = x_{i0} > 0,\ i = 1, \ldots, n,\ n \geqslant 2, \\ J \equiv \displaystyle\int\limits_0^T e^{-\nu t} \left(1 - \sum_{i=1}^n u_i\right) F(x)\, dt \to \max_{u(\cdot)}, \\ x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in R^n_+ = \{x \in R^n \colon x_i > 0\}, \\ u = (u_1, \ldots, u_n)^\top \in U = \left\{ u \in R^n \colon u_i \geqslant 0,\ \displaystyle\sum_{i=1}^n u_i \leqslant 1 \right\}, \\ \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{1}$$

где x — вектор положительных фазовых переменных, u — вектор переменных управления, подчинённых геометрическому ограничению $u(t) \in U \subset R^n$, где область управления U является n-мерным симплексом, $x^0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})^\top \in R^n_+$ — начальное состояние управляемого объекта, $T > 0$ — заданная длительность процесса управления. В дифференциальных уравнениях управляемого движения задачи (1) участвует функция $F(x) = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}, \quad x \in$

R^n_+, — производственная функция Кобба-Дугласа, в которой коэффициенты эластичности ε_1, ε_2, …, ε_n, удовлетворяют условиям:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 1, \quad \varepsilon_i > 0,\ i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Коэффициент дисконтирования $\nu > 0$. Фазовые переменные характеризуют уровень развития соответствующих секторов экономики, а функционал — интегральный объём потребления на отрезке времени $[0, T]$ с учётом дисконтирования. Набор исходных данных задачи управления (1) состоит из положительных чисел $\nu,\ T,\ x_{i0},\ i = 1, \ldots, n$ и параметров (2). Длительность T горизонта планирования предполагается «достаточно большой».

Формулировка теоремы об оптимальном решении задачи (1). Без ограничения общности предположим, что начальные условия задачи (1) подчиняются ограничениям $C_1 : x_1(0) \equiv x_{10} \leqslant x_2(0) \equiv x_{20} \leqslant \ldots \leqslant x_n(0) \equiv x_{n0}$, этого всегда можно добиться путём перенумерации переменных. Введём обозначения:

$$T_\nu = \frac{1}{\nu} \ln \frac{1}{1-\nu} > 0,\ \nu \in (0,1); \quad q(t) = \frac{e^{-\nu t} - e^{-\nu T}}{\nu};\ \theta = T - T_\nu;$$

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \cdot \frac{x_{20}^{1-\varepsilon_1} - x_{10}^{1-\varepsilon_1}}{x_{20}^{\varepsilon_2} \cdots x_{n0}^{\varepsilon_n}},$$

$$\tau_2 = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \cdot \frac{x_{30}^{1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} - x_{10}^{1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}{x_{30}^{\varepsilon_3} \cdots x_{n0}^{\varepsilon_n}},$$

$$\tau_{n-1} = \frac{\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{n-1}}{1-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{n-1})} \cdot \frac{x_{n0}^{1-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{n-1})} - x_{n-10}^{1-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{n-1})}}{x_{n0}^{\varepsilon_n}},$$

$$x_1(\tau_1) = x_{20},\ x_1(\tau_1+\tau_2) = x_2(\tau_1+\tau_2) = x_{30},\ \tau = \tau_1 + \cdots + \tau_{n-1},$$

$$x_i(\tau) = x_{n0},\ i = 1, \ldots, n.$$

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1/(\varepsilon_1+\varepsilon_2) \\ \varepsilon_2/(\varepsilon_1+\varepsilon_2) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{u}_{n-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1/(1-\varepsilon_n) \\ \varepsilon_2/(1-\varepsilon_n) \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1}/(1-\varepsilon_n) \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{u}_n = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Теорема. *В случае C_1 при $\nu \in (0,1)$, $T > T_\nu + \tau$ оптимальное решение задачи* (1) *имеет вид:*

1. *На участке времени $t \in [0, \tau_1]$ оптимальное управление*

$$u(t) \equiv \bar{u}_1;$$

оптимальная траектория

$$x_1(t) = \left(\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \, x_{20}^{\varepsilon_2} \cdots x_{n0}^{\varepsilon_n} \, t + x_{10}^{1-\varepsilon_1} \right)^{1/(1-\varepsilon_1)},$$

$x_i(t) \equiv x_{i0}, \; i = 2, \ldots, n.$

2. *На участке времени $t \in (\tau_1, \tau_1 + \tau_2]$ оптимальное управление*

$$u(t) \equiv \bar{u}_2;$$

оптимальная траектория

$$x_1(t) = x_2(t) = \left(\frac{1-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \, x_{30}^{\varepsilon_3} \cdots x_{n0}^{\varepsilon_n} \, (t-\tau_1) + \right.$$
$$\left. + \, x_{20}^{1-\varepsilon_1-\varepsilon_2} \right)^{1/(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2)},$$

$x_i(t) \equiv x_{i0}, \; i = 3, \ldots, n.$

3. *На участке времени $t \in (\tau_1 + \ldots + \tau_{n-2}, \tau_1 + \ldots + \tau_{n-1}] \equiv (\tau - \tau_{n-1}, \tau]$ оптимальное управление*

$$u(t) \equiv \bar{u}_{n-1};$$

оптимальная траектория

$$x_i(t) = \left(\frac{1-\varepsilon_1-\cdots-\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n-1}} \, x_{n0}^{\varepsilon_n} \, (t-\bar{\tau}) + \right.$$
$$\left. + \, x_{n-1\,0}^{1-\varepsilon_1-\cdots-\varepsilon_{n-1}} \right)^{1/(1-\varepsilon_1-\cdots-\varepsilon_2)},$$

$i = 1, \ldots, n-1, \quad \bar{\tau} = \tau_1 + \cdots + \tau_{n-2}, \quad x_n(t) \equiv x_{n0}.$

4. *На участке времени* $t \in (\tau, \theta]$
   оптимальное управление

$$u(t) \equiv \bar{u}_n;$$

   оптимальная траектория

$$x_i(t) = x_{n0}e^{t-\tau},\ i = 1, \ldots, n.$$

5. *На участке времени* $t \in (\theta, T]$
   оптимальное управление

$$u_i(t) \equiv 0, i = 1, \ldots, n;$$

   оптимальная траектория

$$x_i(t) \equiv x_i(\theta),\ i = 1, \ldots, n.$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00177 мол_а.

НЕКОТОРЫЕ СТАРЫЕ И НОВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

SOME OLD AND NEW PROBLEMS OF STABILITY THEORY

Козлов В.В.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

В докладе будет рассказано о восходящей к Ляпунову классической задаче об обращении теоремы Лагранжа-Дирихле - энергетического условия устойчивости равновесных состояний. Будут продемонстрированы возможности первого метода Ляпунова для сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. В частности, этим методом удалось дать строгое и полное доказательство теоремы Ирншоу о неустойчивости равновесий в поле с гармоническим потенциалом. Предполагается так же обсудить недавнюю гипотезу о неустойчивости изолированных равновесий аналитической системы дифференциальных уравнений в нечетномерном фазовом пространстве. Для гладких систем это предположение не справедливо.

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ АВТОНОМНОЙ НАВИГАЦИИ ДВИЖУЩИХСЯ ОБЪЕКТОВ

THE TASKS OF IMPROVING THE ACCURACY OF THE AUTONOMOUS NAVIGATION OF THE MOVING OBJECTS

Костоусов В.Б., Перевалов Д.С.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия

vkost@imm.uran.ru, perevalovds@imm.uran.ru

Доклад посвящен обсуждению современных задач и новых результатов по теме высокоточной навигации движущихся объектов при неполной и неточной информации о реализующейся траектории и при использовании дополнительной информации о движении, получаемой на основе измерения внешних физических полей. В отечественной литературе по традиции методы решения таких задач называют корреляционно-экстремальными [1]. В ИММ УрО РАН, начиная с 80-х годов прошлого века, эта тематика успешно развивалась под научным руководством Юрия Сергеевича Осипова, при активной поддержке академика Николая Николаевича Красовского. Непосредственным руководителем и основным исполнителем был Виталий Леонидович Гасилов. Результаты этой деятельности нашли отражение в немногочисленных открытых публикациях, например, в докладе [2], статье [3] и в более поздней монографии [4] В.И. Бердышева и В.Б. Костоусова.

В настоящее время, в связи с появлением вычислительных и измерительных систем нового поколения, актуальность данной тематики выросла и возникли новые постановки задач. В докладе, помимо исторических сведений о результатах упомянутых выше работ, обсуждаются некоторые новые задачи высокоточной навигации и наведения по геофизическим полям (ГФП). Среди них, построение эффективных вычислительных с применением параллельных технологий методов моделирования работы корреляционно-экстремальной навигационной системы [5], разработка метода быстрой предварительной и, одновременно, максимально точной оценки информативности геофизического поля [6] и проблема построения высокоточной модели местности по данным космической стереосъемки [7].

Наиболее точным и используемым на практике способом оценки информативности ГФП является метод статистического имитационного моделирования процесса коррекции навигационных ошибок, включающий многократное формирование последовательности замеров и их привязку к эталонной карте поля. Однако, этот способ вычисления информативности весьма трудоемок, что не позволяет его применять при автоматическом построении маршрута с учетом информативности поля. В работе [6] был предложен и успешно применен способ приближенной оперативной оценки информативности поля высот рельефа, в котором решение проблемы опирается на усредненные оценки модуля градиента поля и априорные сведения о статистических характеристиках ошибок измерения значений поля и ошибок картографирования. В данном докладе приведено теоретическое обоснование этого метода на основе применения неравенства Рао-Крамера, оценивающего нижнюю границу ошибки оценивания. Кроме того, проведено сравнение предлагаемого метода с методом статистического имитационного моделирования.

Возможными путями ускорения моделирования процесса работы корреляционно-экстремальной навигационной системы являются модификация навигационного алгоритма и оптимизация статистических испытаний. В докладе для существенного ускорения решения задачи предлагается использовать современные графические ускорители (GPU), для чего конструируется параллельная модификация способа статистической оценки информативности геофизического поля [5]. Результаты экспериментов демонстрируют значительное (в десятки раз) сокращение времени счёта при сохранении качества оценки информативности.

Также, в докладе описывается метод построения высокодетальной цифровой модели местности (ЦММ), состоящей из цифровой матрицы поверхности и описания типов объектов подстилающей поверхности. Обсуждается набор алгоритмов, используемых в методе, и последовательность их работы, которая позволяет надёжно строить ЦММ в автоматическом режиме, с использованием в качестве входных данных космических стереоснимков и электронной карты местности [7]. В докладе акцентируется внимание на алгоритмах текстурного анализа, стереосопоставления и фильтрации итоговой ЦММ. Также, приводятся результаты вычисления ЦММ и их сравнение с эталонными замерами.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Комплексной программы ФНИ УрО РАН, проект «Математическая теория навигации движущихся объектов по геофизическим полям и решение задач оптимизации и управления сложными нелинейными объектами» № 15-16-1-14.

Литература

1. Красовский А.А., Белоглазов И.Н., Чигин Г.П., *Теория корреляционно-экстремальных навигационных систем*, М.: Наука, (1973).

2. Гасилов В.Л., Красовский Н.Н., Осипов Ю.С., “Задачи повышения точности навигации движущихся объектов”, *Тезисы докладов Всесоюзной школы по проблемам математического обеспечения и архитектуры бортовых вычислительных систем*, Ташкент, с.6 (1988).
3. Гасилов В.Л., Костоусов В.Б., “Задача идентификации движущегося объекта на основе обработки изображения внешнего информационного поля”, *Изв.РАН, сер.Техническая кибернетика*, No 3, 78-86 (1994).
4. Бердышев В.И., Костоусов В.Б., *Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям*, Екатеринбург: УрО РАН, (2007).
5. Костоусов В.Б., Тарханов А.Е., “Параллельные алгоритмы оценки информативности геофизического поля”, *Труды V международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» PACO’2010*, М.: Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН. С.759-765. (2010).
6. Аверин В.А., Костоусов В.Б., “Новый метод оценки информативности геофизического поля”, *Материалы XXVIII конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н.Острякова*, СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», с.47 (2012).
7. Перевалов Д.С., Корнилов Ф.А., Дунаева А.В., “Метод построения цифровой модели местности по данным космической стереосъемки”, *«Люльевские чтения: Материалы X межрегиональной отраслевой научно-технической конференции»*, «ОКБ «Новатор» Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, с.88-89 (2016).

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПОВОДЫРИ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

FINITE-DIMENSIONAL GUIDES OF NEUTRAL-TYPE SYSTEMS

Лукоянов Н.Ю.

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

nyul@imm.uran.ru

Доклад посвящен процедурам управления функционально-дифференциальными системами, включающим в цепь обратной связи аппроксимирующие конечномерные модели-поводыри. Рассматриваемые аппроксимационные конструкции восходят к работам [1–7]. В [8] подобные конструкции были использованы для построения вспомогательных моделирующих поводырей при решении задач конфликтного управления в системах с запаздыванием.

Обоснование процедур управления с конечномерными моделирующими поводырями для функционально-дифференциальных систем запаздывающего типа дано в [9], для систем нейтрального типа — в [10]. В докладе обсуждаются приложения развиваемых аппроксимационных конструкций для решения задач конфликтного управления и динамической оптимизации гарантии в системах нейтрального типа. Основу составляет следующий результат.

Пусть уравнение движения исходной системы имеет вид

$$\mathrm{d}\big(x[t]-g\big(t,x_t[\cdot]\big)\big)/\mathrm{d}t = f\big(t,x_t[\cdot],u[t],v[t]\big),\quad t\in[t_0,\vartheta],$$

$$x[t]\in\mathbb{R}^n,\ u[t]\in\mathbb{U},\ v[t]\in\mathbb{V},\quad x_{t_0}[\zeta]=x[t_0+\zeta]=z[\zeta],\ \zeta\in[-h,0].$$

Здесь t — время; $x[t]$ – вектор текущего состояния; $h=$const>0; $x_t[\cdot]$ – история движения на $[t-h,t]$, причем $x_t[\zeta]=x[t+\zeta]$, $\zeta\in[-h,0]$; $u[t]$ – управляющее воздействие; $v[t]$ – воздействие помехи или противодействия; $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ – компакты конечномерных пространств. Допустимы измеримые реализации $u[t_0[\cdot]\vartheta)=\{u[t]\in\mathbb{U}, t_0\leqslant t<\vartheta\}$ и $v[t_0[\cdot]\vartheta)=\{v[t]\in\mathbb{V}, t_0\leqslant t<\vartheta\}$. Решение уравнения понимается в смысле Каратеодори. Предполагаются выполненными следующие условия, где посредством $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначено скалярное произведение; посредством $\|\cdot\|$ — евклидова норма; посредством C — пространство непрерывных функций из $[-h,0]$ в $\mathbb{R}^n$, оснащенное равномерной нормой $\|\cdot\|_C$.

(У.1) Существуют такие $\alpha>0$ и h_i, $i=\overline{1,k}$, $0<h_1<h_2<\ldots<h_k=h$, что при всех $t\in[t_0,\vartheta]$ и $x[\cdot],w[\cdot]\in C$

$$\big\|g\big(t,x[\cdot]\big)-g\big(t,w[\cdot]\big)\big\|\leqslant\alpha\Bigg(\int\limits_{-h}^{0}\big\|x[\zeta]-w[\zeta]\big\|\mathrm{d}\zeta+\sum_{i=1}^{k}\big\|x[-h_i]-w[-h_i]\big\|\Bigg).$$

(У.2) Для любых $t,\tau\in[t_0,\vartheta]$ и $x[\cdot]\in C$

$$\big\|g\big(t,x[\cdot]\big)-g\big(\tau,x[\cdot]\big)\big\|\leqslant\beta\big(1+\big\|x[\cdot]\big\|_C\big)\big|t-\tau\big|,\quad\beta=\mathrm{const}>0.$$

(У.3) Отображение $[t_0,\vartheta]\times C\times\mathbb{U}\times\mathbb{V}\ni\big(t,x[\cdot],u,v\big)\mapsto f\big(t,x[\cdot],u,v\big)\in\mathbb{R}^n$ непрерывно.

(У.4) Для любых $t\in[t_0,\vartheta]$, $x[\cdot]\in C$, $u\in\mathbb{U}$ и $v\in\mathbb{V}$

$$\big\|f\big(t,x[\cdot],u,v\big)\big\|\leqslant\gamma\big(1+\big\|x[\cdot]\big\|_C\big),\quad\gamma=\mathrm{const}>0.$$

(У.5) Для любого компакта $D\subset C$ существует число $L\big(D\big)>0$ такое, что для всех $t\in[t_0,\vartheta]$, $u\in\mathbb{U}$, $v\in\mathbb{V}$ и $x[\cdot],w[\cdot]\in D$

$$\big\|f\big(t,x[\cdot],u,v\big)-f\big(t,w[\cdot],u,v\big)\big\|\leqslant L(D)\big\|x[\cdot]-w[\cdot]\big\|_C.$$

(У.6) Для любых $t\in[t_0,\vartheta]$, $x[\cdot]\in C$ и $r\in\mathbb{R}^n$

$$\min_{u\in\mathbb{U}}\max_{v\in\mathbb{V}}\big\langle f\big(t,x[\cdot],u,v\big),r\big\rangle=\max_{v\in\mathbb{V}}\min_{u\in\mathbb{U}}\big\langle f\big(t,x[\cdot],u,v\big),r\big\rangle.$$

(У.7) Начальная функция $z[\cdot]$ абсолютно непрерывна, причем
$\|z[\zeta]\| \leqslant R_0,\ \zeta \in [-h,0]$; $\quad \|\dot z[\zeta]\| \leqslant R_0$ при п.в. $\zeta \in [-h,0]$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$ и $\Delta h = h/m$. Уравнения движения аппроксимирующей системы определяются следующим образом:

$$\dot y^{[0]}[t] = f\big(t, S\big(Y[t]\big)[\cdot], \tilde u[t], \tilde v[t]\big),\ y^{[0]}[t_0] = y_0^{[0]}, \quad t \in [t_0,\vartheta],$$
$$\dot y^{[1]}[t] = \big(y^{[0]}[t] + g\big(t, S\big(Y[t]\big)[\cdot]\big) - y^{[1]}[t]\big)/\Delta h,\ y^{[1]}[t_0] = y_0^{[1]},$$
$$\dot y^{[i]}[t] = \big(y^{[i-1]}[t] - y^{[i]}[t]\big)/\Delta h,\ y^{[i]}[t_0] = y_0^{[i]},\ i = \overline{2,m},$$

где $y^{[i]}[t] \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0,m}$; $Y[t] = \big(y^{[1]}[t], \ldots, y^{[m]}[t]\big)$; $S(Y[t])[\cdot]$ – линейный сплайн на $[-h,0]$ с узлами $-i\Delta h$ и со значениями в узлах $S(Y[t])[0] = y^{[1]}[t]$, $S(Y[t])[-i\Delta h] = y^{[i]}[t]$, $i = \overline{1,m}$; $\tilde u[t] \in \mathbb{U}$, $\tilde v[t] \in \mathbb{V}$. Начальная функция $z[\cdot]$ в исходной системе и начальные значения $y_0^{[i]}$, $i = \overline{0,m}$, в аппроксимирующей системе связаны следующим условием:

(У.8) Справедливы неравенства
$\big\|y_0^{[0]} - z[0] + g\big(t_0, z[\cdot]\big)\big\| \leqslant R_*\Delta h,\ \big\|y_0^{[i]} - z[-i\Delta h]\big\| \leqslant R_*\Delta h,\ i = \overline{1,m}.$

Между исходной и аппроксимирующей системами осуществляется взаимное прицеливание: реализации $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ и $\tilde v[t_0[\cdot]\vartheta)$ формируются по принципу обратной связи по шагам разбиения

$$\Delta_\delta = \big\{t_j : 0 < t_{j+1} - t_j < \delta,\ j = \overline{0, J-1},\ t_J = \vartheta\big\},$$

как кусочно-постоянные функции

$$u[t] = u_j^\circ,\ \tilde v[t] = \tilde v_j^\circ,\ t \in [t_j, t_{j+1}),\ j = \overline{0, J-1},$$

где

$$u_j^\circ \in \arg\min_{u\in\mathbb{U}} \max_{v\in\mathbb{V}} \Big\langle f\big(t_j, x_{t_j}[\cdot], u, v\big),\ x[t_j] - g\big(t_j, x_{t_j}[\cdot]\big) - y^{[0]}[t_j]\Big\rangle,$$

$$\tilde v_j^\circ \in \arg\max_{v\in\mathbb{V}} \min_{u\in\mathbb{U}} \Big\langle f\big(t_j, S(Y[t_j])[\cdot], u, v\big),\ x[t_j] - g\big(t_j, x_{t_j}[\cdot]\big) - y^{[0]}[t_j]\Big\rangle.$$

Теорема. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $M = M(\varepsilon) > 0$ и $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого натурального $m > M$ при любых допустимых реализациях $\tilde u[t_0[\cdot]\vartheta)$, $v[t_0[\cdot]\vartheta)$ и реализациях $u[t_0[\cdot]\vartheta)$, $\tilde v[t_0[\cdot]\vartheta)$, формируемых по указанному выше правилу, для движений исходной и аппроксимирующей систем будет справедлива оценка*

$$\big\|y^{[0]}[t] + g\big(t, S\big(Y[t]\big)[\cdot]\big) - x[t]\big\| \leqslant \varepsilon,\ t \in [t_0, \vartheta].$$

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 15–11–10018).

Литература

1. Красовский Н.Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием, *ПММ*, 28, Вып. 4, 716-724 (1964).
2. Репин Ю.М. О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами, *ПММ*,29, Вып. 2, 226-235 (1965).
3. Куржанский А.Б. К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, *Дифференц. уравнения*, 3, No. 12, 2094-2107 (1967).
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры*, М.: Наука (1974).
5. Осипов Ю.С. К теории дифференциальных игр систем с последействием, *ПММ*, 35, Вып. 2, 300-311 (1971).
6. Кряжимский А.В., Максимов В.И. Аппроксимация линейных дифференциально-разностных игр, *ПММ*, 42, Вып. 2, 202-209 (1978).
7. Максимов В.И. Об аппроксимации управляемых систем нейтрального типа обыкновенными управляемыми системами, *Дифференц. уравнения*, 20, No. 4, 585-593 (1984).
8. Красовский Н.Н., Котельникова А.Н. Стохастический поводырь для объекта с последействием в позиционной дифференциальной игре, *Тр. ИММ УрО РАН*, 17, No 2, 97-104 (2011).
9. Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. Конечномерные моделирующие поводыри в системах с запаздыванием, *Тр. ИММ УрО РАН*, 19, No. 1, 182–195 (2013).
10. Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. Об аппроксимации нелинейных конфликтно-управляемых систем нейтрального типа, *Тр. ИММ УрО РАН*, 20, No. 4, 204–217 (2014).

ЗАДАЧИ ГАРАНТИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ФАЗОВЫХ КООРДИНАТАХ

PROBLEMS OF GUARANTEEING POSITIONAL CONTROL UNDER INCOMPLETE INFORMATION ON PHASE COORDINATES

Максимов В.И.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Проблема построения оптимальных стратегий управления с обратной связью в условиях неопределенности возникла во второй половине прошлого века в контексте инженерных задач, прежде всего, задач об автоматическом регулировании техническими системами. Для таких задач характерны два фактора неопределенности: действие на управляемую систему неконтролируемых динамических возмущений и неполнота информации о состояниях системы. В обеих ситуациях решения требуют применения принципа управления с обратной связью, позволяющего использовать всю доступную текущую информацию о системе для выработки решений о ее управлении в реальном времени.

Приняты два основных типа описания системных неопределенностей: вероятностный, предполагающий наличие той или иной статистической информации о факторах неопределенности, и детерминированный, предполагающий отсутствие такой информации. В последнем случае факторы неопределенности подчиняют априорным детерминированным ограничениям типа включений. В рамках этого направления изучение задач управления при неконтролируемых динамических входах привело к созданию во второй половине прошлого века масштабной теории антагонистических дифференциальных игр. Решающий вклад в ее становление и развитие внесла уральская школа по теории управления, возглавлявшаяся Н.Н. Красовским. Созданная этой школой теория позиционных дифференциальных игр разрешает фундаментальные вопросы о существовании равновесий в классах стратегий управления с обратной связью, о структуре оптимальных стратегий, предлагает серию оригинальных методов их построения.

Теория позиционных дифференциальных игр позволяет рассматривать задачу управления, стоящую перед каждым из двух игроков-антагонистов, как задачу оптимального гарантирующего управления, в которой воздействия игрока-противника (динамические возмущения) могут формироваться произвольным, неизвестным управляющему игроку механизмом в пределах априорно заданных детерминированных ограничений. Искомая позиционная стратегия управляющего игрока при этом гарантирует наилучшее (либо требуемое) качество движению системы при наихудшей реализации динамического возмущения. В следствие этого теорию позиционных дифференциальных игр называют также теорией гарантирующего (либо гарантированного) управления.

Теория гарантирующего управления, концентрируясь на задачах управления в условиях неопределенных динамических помех, традиционно предполагает, что управляющие обратные связи используют полную информацию о текущих состояниях системы. В настоящем сообщении речь пойдет о задачах гарантирующего управления при измерении части фазовых координат. Для решения обсуждаемых задач будет развита методология, которая основана на сочетании идеологии «классической» теории гарантирующего управления [1, 2] с теорией динамического обращения [3, 4]. (Последняя совмещает методологию позиционного управления с принципом регуляризации из теории некорректно поставленных задач и нацелена, прежде всего, на решение задач идентификации в режиме реального времени текущих значений неконтролируемых переменных входов.) При этом мы остановимся на конфликтно-управляемых системах, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями с распределенными параметрами.

В качестве примера системы с распределенными параметрами рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\eta)+l\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,\eta) &= \Delta_L\psi(t,\eta)+(Bu(t))(\eta)-(Cv(t))(\eta),\\ \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,\eta) &= \Delta_L\varphi(t,\eta)+g(t,\eta,\varphi(t,\eta))+\psi(t,\eta)\\ &((t,\eta)\in Q=(t_0,\vartheta)\times\Omega)\end{aligned}\tag{1}$$

с граничным

$$\frac{\partial}{\partial n}\psi(t,\eta)=\frac{\partial}{\partial n}\varphi(t,\eta)=0\quad((t,\eta)\in(t_0,\vartheta)\times\partial\Omega)$$

и начальным

$$\psi(t_0,\eta)=\psi_0,\quad \varphi(t_0,\eta)=\varphi_0\quad(\eta\in\Omega)$$

условиями. Здесь $t\in[t_0,\vartheta]$ $(t_0<\vartheta<\infty)$ — переменная времени; $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, где $n=2,3,$ — ограниченная пространственная область с гладкой границей $\partial\Omega$; B и C — линейные ограниченные операторы, действующие соответственно из банаховых пространств Y и Z в гильбертово пространство $H=L_2(\Omega)$ и преобразующие внешние воздействия $u(t)\in Y$ и $v(t)\in Z$, оказываемые на систему в каждый момент t, в результаты $(Bu(t))(\eta)$ и $(Cv(t))(\eta)$ их непосредственного влияния на динамику системы в этот момент в каждой точке $\eta\in\Omega$; Δ_L — оператор Лапласа; l — положительная константа; $g(t,\eta,\varphi)=a(t,\eta)\varphi+b(t,\eta)\varphi^2-c(\eta)\varphi^3$, при этом $a(\cdot),b(\cdot)\in L_\infty(Q)$, $c(\cdot)\in L_\infty(\Omega)$, $c(\eta)\geqslant c>0$ для п.в. $\eta\in\Omega$; $\partial/\partial n$ — обозначение производной вдоль нормали к $\partial\Omega$, внешней по отношению к Ω; $(\psi_0,\varphi_0)\in H^2$ — состояние системы в начальный момент t_0, $\psi_0,\varphi_0\in W^2_\infty(\Omega)$, $\frac{\partial}{\partial n}\psi_0(\eta)=\frac{\partial}{\partial n}\varphi_0(\eta)=0$ $(\eta\in\partial\Omega)$.

Для системы (1) обсуждаются две взаимно дополняющие игровые задачи о гарантированном позиционном управлении в условиях полной и неполной информации о ее наблюдаемых состояниях. Уравнения характеризуют процесс отвердевания жидкого вещества в ограниченной пространственной области. Устанавливается, что решения задач при полной и неполной информации эквивалентны в смысле асимптотически гарантированных результатов. Решения основаны на методе экстремального сдвига и методе априори стабильных множеств из теории гарантированного позиционного управления и используют конструкции устойчивого динамического обращения управляемых систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 14-01-00539).

Литература

1. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. Москва, Наука, (1970).
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва, Наука, (1984).
3. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Gordon and Breach, (1995).
4. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И., Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург, УрО РАН (2011).

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В МНОГОРЕГИОНАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

PARALLEL ALGORITHM FOR COMPUTING AN EQUILIBRIUM IN THE MULTIREGION ECONOMIC GROWTH MODEL

Мельников Н.Б., Груздев А.П.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова Москва, Россия

melnikov@cs.msu.su, gruzdev@cs.msu.su

Дальтон М.Г.

Национальное управление океанических и атмосферных исследований, Сиэтл, США

michael.dalton@noaa.gov

О'Нилл Б.Ч.

Национальный центр атмосферных исследований, Боулдер, США

boneill@ucar.edu

Динамические модели экономического роста используются для оценки последствий возможных климатических, демографических и технологических изменений. Экономическое равновесие описывается в рамках теории Эрроу-Дебре. Многосектороность модели и учет динамики приводят к системам нелинейных уравнений большой размерности.

Для вычисления решения системы нелинейных уравнений большой размерности обычно используются итерационные методы крыловского типа, которые адаптированы к работе с разреженными матрицами большой размерности. В нашей работе [1] предложен параллельный алгоритм для метода типа Гаусса–Зейделя [2]. Метод учитывает блочную структуру системы уравнений, присущую моделям данного типа. Алгоритм реализован с использованием технологий параллельного программирования для однорегиональной модели PET [3]. Результаты показывают, что скорость работы предложенного алгоритма сопоставима со скоростью методов крыловского типа (см., напр., [4]). В данной работе алгоритм применяется для многорегиональной модели.

Параллельный алгоритм реализован с помощью технологии OpenMP для многоядерных систем с общей памятью. Расчеты выполнены на суперкомпьютере Ломоносов [5] с использованием узла SMP (Symmetric Multiprocessing). Данный узел поддерживает работу с большим по меркам систем с общей памятью числом ядер (до 128). Использование SMP узла позволило исследовать OpenMP-реализацию предлагаемого метода на *сильную масштабируемость*: выяснить, как меняется время вычислений с увеличением ресурсов при неизменном общем размере задачи.

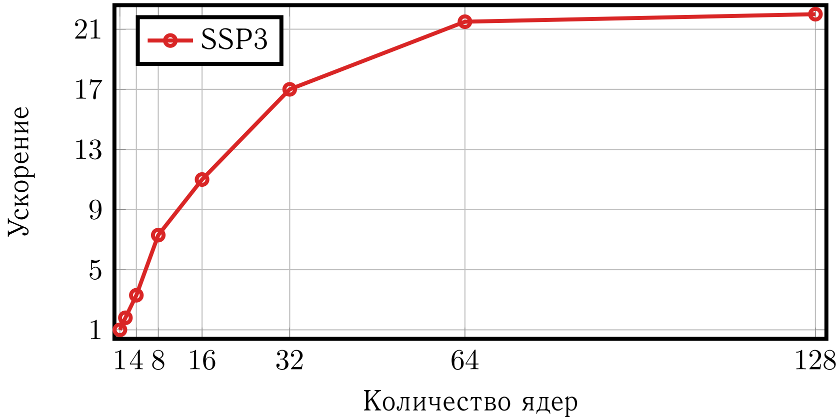

Рис. 1: График ускорения на узле SMP.

Расчеты выполнены для девятирегиональной модели PET [6] с использованием сценария социоэкономического развития SSP3 [7]. Как видно из Рис. 1, OpenMP-реализация алгоритма дает ускорение более чем в 22 раза. При этом хорошая *сильная масштабируемость* наблюдается при использовании до 64 ядер. Дальнейшее увеличение вычислительных ресурсов не дает выигрыша при фиксированном размере задачи.

Литература

1. Melnikov N.B., Gruzdev A.P., Dalton M., O'Neill B., "Parallel algorithm for solving large-scale dynamic general equilibrium models," *Russian Supercomputing Days*, 84–95 (2015).
2. Fair R., Taylor J., "Solution and maximum likelihood estimation of dynamic nonlinear rational expectations models," *Econometrica*, 51, No. 4, 1169–1185 (1983).
3. Melnikov N.B., O'Neill B.C., Dalton M.G., "Accounting for the household heterogeneity in dynamic general equilibrium models," *Energy economics*, 34, No. 5. 1475–1483 (2012).
4. Pernice M., Walker H., "NITSOL: A Newton iterative solver for nonlinear systems," *SIAM J. Sci. Comput.*, 19, No. 1. 302–318 (1998).
5. Воеводин Вл.В., Жуматий С.А., Соболев С.И., Антонов А.С., Брызгалов П.А., Никитенко Д.А., Стефанов К.С., Воеводин Вад.В., "Практи-

ка суперкомпьютера ‘Ломоносов’,” *Открытые системы*, No. 7, 36–39 (2012).
6. O’Neill B., Dalton D., Fuchs R., Jiang L., Pachauri S., Zigova K., “Global demographic trends and future carbon emissions,” *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 107, No. 41, 17521–17526 (2010).
7. O’Neill B., Kriegler E., Riahi K., Ebi K., Hallegatte S., Carter T., Mathur R., van Vuuren D., “A new scenario framework for climate change research: the concept of shared socioeconomic pathways,” *Climatic Change*, 122, No. 3, 387–400 (2014).

О ДИНАМИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ, ВХОДЯЩИХ В ОПИСАНИЕ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

DYNAMIC IDENTIFICATION OF SOME ELEMENTS ENTERING IN DESCRIPTION OF CONTROL SYSTEM

Никольский М.С.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

mni@mi.ras.ru

В последние десятилетия была развита теория обратных задач для управляемых объектов (см.,например, [1,2]). Традиционной для этой теории является задача о восстановлении неизвестного управления по зашумленным измерениям траектории управляемого объекта. В общем случае не всегда по известной траектории можно однозначно восстановить порождающее измеримое управление. Поэтому в теории обратных задач стараются вычислить нормальное порождающее управление. В условиях зашумленности измерений траектории управляемого объекта, обычно используют для аппроксимирущих управлений слабую и сильную сходимости в соответствующем гильбертовом пространстве L_2, элементами которого являются допустимые порождающие траекторию управления. Важными инструментами для построения аппроксимаций являются метод экстремального прицеливания Н.Н.Красовского и метод регуляризации А.Н.Тихонова.

В настоящей работе рассматриваются две задачи динамической идентификации в рамках известной модели теории обратных задач для управляемых объектов(см., например, [1], Гл.1). В первой нашей задаче ищется неизвестный векторный параметр p_0, входящий в правую часть соответствующего векторного дифференциального уравнения, описывающего динамику рассматриваемого объекта. Предполагается, что известна априорная геометрическая оценка на этот вектор в виде: p_0 принадлежит U , где U - известный компакт в конечномерном евклидовом пространстве. При выполнении определенных условий удается построить в условиях зашумленности выхода системы некоторое приближение для искомого вектора, причем, чем меньше по евклидовой норме помеха, тем меньше евклидова норма разности искомого вектора p_0 и построенного приближения. Это приближение конструктивно строится по конечному числу замеров наблюдаемого зашумленного выхода системы на отрезке времени [0,T]. Была получена конструктивная оценка сверху для скорости сходимости построенного приближения к искомому вектору p_0 в евклидовой норме.

Во второй задаче ищется неизвестное порождающее управление $u_0(t)$, где $t \in [0, T]$, в предположениях, что $u_0(t) \in U$ при $t \in [0, T]$, где U - известный компакт в конечномерном евклидовом пространстве, и $u_0(t)$ является непрерывной функцией с известным модулем непрерывности на [0,T]. При выполнении найденных нами условий удается построить в условиях измерений зашумленного выхода системы некоторое кусочно-постоянное приближение для искомой функции, причем , чем меньше по евклидовой норме помеха, тем лучше аппроксимация в смысле метрики $sup|u_0(t) - u_h(t)|$, где $| \cdot |$ означает евклидову длину вектора, супремум берется по отрезку наблюдения [0,T], а $u_h(t)$ обозначает аппроксимирующую функцию, которая зависит от параметра h - оценки по норме сверху неточности измерений выхода системы, известной наблюдателю. Это приближение конструктивно строится по конечному числу замеров наблюдаемого зашумленного выхода системы на отрезке времени $[0, T]$. Была получена конструктивная оценка сверху для скорости сходимости в упомянутой метрике построенного нами приближения к искомой функции $u_0(t)$ на [0,T] при h, стремящемся к нулю. Заметим, что для получения этой оценки параметр δ - величина шага равномерных наблюдений на отрезке [0,T] выбирается в зависимости от параметра $h > 0$.

Отметим , что важную роль при получении указанных результатов играют условия, гарантирующие единственность вектора p_0 в первой задаче и соответственно функции $u_0(t)$ во второй задаче, если соответствующие траектории замеряются без ошибок. Благодаря этим условиям удается построить приближения к искомым p_0 и $u_0(t)$ более простым образом и получить другие оценки сходимости, чем это можно было бы сделать в более общих случаях с позиций теории обратных задач для управляемых объектов (см.,например, [1,2]).

Отметим ещё, что общая теория идентификации занимает важное место в современной теории управления. О динамических задачах идентификации см.,например, в [3].

Литература

1. Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М., *Основы метода динамической регуляризации*, Издательство Моск. ун-та, (1999).
2. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И., *Методы динамического восстановления входов управляемых систем*, Екатеринбург, (2011).
3. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М., *Качественная теория оптимальных процессов*, Москва, Наука, (1971).

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

APPROXIMATE SOLUTION TO CONTROL PROBLEMS FOR THE WAVE EQUATION

Потапов М.М.

МГУ имени М.В. Ломоносова, ВМК, Москва, Россия

mpotapov@tochka.ru

В [1,2] был предложен вариационный подход к решению линейных уравнений с некомпактными операторами в гильбертовых пространствах, способный вырабатывать устойчивые приближения к их нормальным решениям в особых информационных условиях, близких в определенном смысле к требованиям истокопредставимости метода квазирешений В.К. Иванова. При этом для сходимости метода [1,2], в отличие от классических методов регуляризации А.Н. Тихонова или М.М. Лаврентьева, не требовалось не только знание уровня погрешности в операторе, но и саму операторную близость достаточно было понимать не в равномерном, а в поточечном смысле. Метод [1,2] оказался удобным инструментом приближенного решения двойственных задач граничного и зонного управления и наблюдения для волнового уравнения вида

$$\rho(x)\, y_{tt}(t,x) = \big(k(x)\, y_x(t,x)\big)_x - q(x)\, y(t,x), \quad 0 < t < T,\ 0 < x < l.$$

Накопленный к 2010 г. опыт получения конструктивных априорных оценок, обеспечивающих выполнение условий усиленой истокопредставимости, а также опыт практической реализации метода, нашел отражение в книге [3] и цитированных в ней источниках.

В работе [4] был сделан первый шаг в направлении существенного уточнения упомянутых конструктивных априорных оценок. В [4] и последовавших за ней работах была развита техника получения таких оценок с оптимальным пороговым моментом управляемости-наблюдаемости на произвольных временных промежутках. Кроме того, было показано, что в зависимости от выбора функциональных классов эти оценки вблизи порогового момента могут как вырождаться, так и оставаться невырожденными. Оценки, полученные на докритических временных промежутках, легли в основу предложенного в [5] устойчивого метода решения задач быстродействия в сильных классах обобщенных решений, который впоследствии был распространен и на слабые классы.

В последнее время класс задач управления для волнового уравнения, для которых можно строить устойчивые приближенные решения, пополнился задачами наилучшего приближения с эллипсоидальными ограничениями [6] и задачами позиционного граничного управления с неопределенностями и возмущениями [7]. Предложены также и вполне определенные соображения по распространению идеологии вариационного подхода [1,2] на случай рефлексивных банаховых пространств типа Лебега и Соболева с интегральными нормами.

Литература

1. Потапов М.М., "О сильной сходимости разностных аппроксимаций задач граничного управления и наблюдения для волнового уравнения," *ЖВМ и МФ*, 38, No. 3, 387–397 (1998).
2. Потапов М.М., "Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущенным оператором," *Доклады РАН*, 365, No. 5, 596–598 (1999).
3. Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М., Разгулин А.В., *Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения*, Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, (2010).
4. Потапов М.М., Дряженков А.А., "Оптимизация порогового момента в неравенстве наблюдаемости для волнового уравнения с краевым условием упругого закрепления," *Труды Математического института им. В.А. Стеклова*, 277, 215–229 (2012).
5. Иванов Д.А., Потапов М.М., "Приближенное решение задачи быстродействия для волнового уравнения с граничными управлениями," *Труды Математического института им. В.А. Стеклова*, 291, 112–127 (2015).
6. Дряженков А.А., Потапов М.М. "Численный метод для задачи квадратичной минимизации с эллипсоидальным ограничением при наличии априорной оценки нормы решения," *ЖВМ и МФ*, 56, No. 2, 208–223 (2016).

7. Дряженков А.А., Потапов М.М. “Численное решение задачи позиционного граничного управления для волнового уравнения с неизвестными начальными данными,” *Труды Института Математики и Механики УрО РАН*, 22, No. 2, 138–146 (2016).

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ ИСТОЧНИКА И КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА И СОБОЛЕВА

INVERSE SOURCE AND INVERSE COEFFICIENTS PROBLEMS FOR ELLIPTIC AND PARABOLIC EQUATIONS IN HOLDER AND SOBOLEV SPACES

Прилепко А.И.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

prilepko.ai@yandex.ru

Костин А.Б., Соловьев В.В.

НИЯУ МИФИ, Москва, Россия

abkostin@yandex.ru, solovievv@mail.ru

В докладе будут представлены результаты по разрешимости обратных задач, полученные авторами за последние пятнадцать лет (см., например, [1]–[3]). Приведем некоторые из них.

Обратные задачи для эллиптических уравнений в пространствах Гёльдера. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ точек $x = (x_1, \dots, x_n)$ задана ограниченная область D с достаточно гладкой границей $\partial D \in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ — фиксированная постоянная. Пространство $\mathbb{R}^n$ считаем вложенным в пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ точек $(y, x) = (y, x_1, \dots, x_n)$. Для числа $q > 0$ определим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ цилиндр с основанием D

$$Q(q) = \{(y, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -q < y < q,\, x \in D\}.$$

Боковую поверхность этого цилиндра обозначим

$$\Gamma(q) = \{(y, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -q < y < q,\, x \in \partial D\}.$$

Будем говорить, что область $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ удовлетворяет условию (A), если существуют такие числа $0 < q < p$, что для области Ω справедливо $Q(q) \subset \Omega \subset Q(p)$.

Пусть область Ω удовлетворяет условию (A). Определим пространства гёльдеровых функций:

$$\mathcal{U}(\Omega) = \{u \in C(\overline{\Omega}) \mid u \in C^{2,\alpha}(\Omega), u_{yy} \in C(\Omega \cup \Gamma(q))\},$$
$$\mathcal{F}(D) = \{f \in C(\overline{D}) \mid f \in C^{\alpha}(D)\}.$$

В области Ω рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u, f) \in \mathcal{U}(\Omega) \times \mathcal{F}(D)$ из условий

$$(Lu)(y,x) = f(x)h(y,x) + g(y,x), \quad (y,x) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(y,x) = \mu(y,x), \quad (y,x) \in \partial\Omega, \tag{2}$$

$$u(0,x) = \chi(x), \quad x \in \overline{D}. \tag{3}$$

В уравнении (1) равномерно эллиптический в области Ω оператор L имеет вид:

$$(Lu)(y,x) = a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u.$$

Теорема 1. (Альтернатива Фредгольма) *Пусть область Ω удовлетворяет условию (A) и имеет границу $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$. Пусть для коэффициентов оператора L и функции h выполнены условия: $a, a_{ij}, b_i, c \in C^{\alpha}(\overline{D})$; $h, h_y \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$; $c(x) \leqslant 0$, $|h(0,x)| \geqslant h_0 > 0$, $x \in D$. Тогда для задачи (1)–(3) выполнено одно из двух утверждений:*

1. *однородная обратная задача (1)–(3), т.е. задача (1)–(3) с функциями $g = 0$, $\mu = 0$, $\chi = 0$, имеет конечное число линейно независимых решений;*
2. *обратная задача (1)–(3) для произвольных функций $g \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\mu \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, $\chi \in C^{2,\alpha}(\overline{D})$, $\chi(x) = \mu(0,x)$, $x \in \partial\Omega$, имеет и притом единственное решение $(u, f) \in \mathcal{U}(\Omega) \times \mathcal{F}(D)$.*

Для обратных задач вида (1)–(3) найдены локальные и глобальные условия однозначной разрешимости. Рассмотрены также нелинейные задачи восстановления коэффициентов оператора L в близкой постановке и получены условия их однозначной разрешимости. Изучены задачи с переопределением не внутри, а на границе области Ω.

Обратные задачи для параболических уравнений в пространствах Соболева. Для краткости приведём результаты в модельном случае, ограничившись линейной задачей. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$, а $Q = \Omega \times (0,T)$ — это цилиндр с боковой поверхностью $S = \partial\Omega \times [0,T]$. Ищется пара функций $\{u(x,t); f(x)\}$ удовлетворяющих условиям:

$$\rho(x,t)\, u_t - \Delta u - d(x,t)\, u = h(x,t) f(x), \quad (x,t) \in Q, \tag{4}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S, \tag{5}$$

$$l(u) \equiv \int_0^T u(x,t)\, d\mu(t) = \chi(x), \quad x \in \Omega. \tag{6}$$

Здесь ρ, d, h, χ, $\mu(t)$ заданные функции, Δ – оператор Лапласа, в условии нелокального наблюдения (6) интеграл понимается как интеграл Римана – Стилтьеса. Решение — это пара $u \in W_2^{2,1}(Q)$, $f \in L_2(\Omega)$. Пусть $\rho(x,t)$, $d(x,t)$, $\chi(x)$, $h(x,t)$, $\mu \in BV[0,T]$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\rho,\ \rho_t \in C(\overline{Q});\ d,\ d_t \in L_\infty(Q);\ \chi \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega);\\ &h,\ h_t \in L_{\infty,2}(Q);\ \ |l(h)(x)| \geqslant \delta > 0,\ x \in \Omega;\\ &\mu(t) \nearrow,\ \mu \text{ непрерывна справа на } [0,T],\ \textstyle\bigvee_0^T(\mu) > 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (7), $|l(h)(x)| \geqslant \delta > 0$ в Ω, $h(x,t)l(h)^{-1}(x) \geqslant 0$ в Q и хотя бы одно из условий:*

1. $h_t(x,t)l(h)^{-1}(x) \geqslant 0$, $d(x,t) \leqslant 0$, $d_t(x,t) \geqslant 0$ *в* Q;
2. $d\mu(t) = \omega(t)dt$ *с функцией* $\omega \in W_1^1(0,T)$ *такой, что справедливо неравенство* $(\omega(t)\, \varrho(x,t))'_t + d(x,t)\, \omega(t) \leqslant 0$ *в* Q.

Тогда существует и притом единственное решение обратной задачи (5)–(6) $u \in W_2^{2,1}(Q)$, $f \in L_2(\Omega)$ *и справедлива оценка:*

$$\|f\|_{2,\Omega} + \|u\|_{2,Q}^{(2,1)} \leqslant C\, \|\Delta\chi\|_{2,\Omega}\,.$$

Получены также результаты по разрешимости в классах Соболева коэффициентных обратных задач для параболических уравнений с условием нелокального наблюдения.

Литература

1. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. *Methods for solving inverse problems in mathematical physics.* — New York: Marcel Dekker, 2000.

2. Соловьёв В. В. «Обратные задачи для эллиптических уравнений в пространстве II», *Дифференц. уравнения.* — 2011. – Т. 47, № 5. -- С. 714–723.
3. Костин А. Б. «Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения», *Матем. сб.* — 2013. – Т. 204, № 10. -- С. 3–46.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫРУБКОЙ ЛЕСА В МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИИ, СТРУКТУРИРОВАННОЙ ПО РАЗМЕРУ, С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ РОСТА И ПЛОТНОСТЬЮ

OPTIMAL CONTROL OF FOREST HARVESTING IN A SIZE-STRUCTURED POPULATION MODEL WITH FEEDBACK BETWEEN GROWTH PARAMETERS AND DENSITY

Ровенская Е. А.,

МГУ, факультет Вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия
Международный институт прикладного системного анализа, Лаксенбург, Австрия

rovenska@iiasa.ac.at

Брэнстром А., Франклин О., Дикманн У.

Международный институт прикладного системного анализа, Лаксенбург, Австрия

Введение. Данная работа посвящена поиску стратегий оптимальной вырубки леса в модели стационарного распределения деревьев по размеру. Динамика плотности распределения деревьев по размеру моделируется с помощью стандартного уравнения переноса с нелинейными функциями роста и смертности деревьев, зависящими от общей плотности деревьев. С помощью этих функций модель учитывает асимметричность конкуренции деревьев за ресурсы, прежде всего, за энергию солнечного света. Данная конкуренция приводит к тому, что деревья, получающие максимальной объем солнечного света, растут быстрее и умирают с меньшей вероятностью, чем деревья, находящиеся в тени других деревьев и получающие недостаточное количество света.

Оптимальность понимается в смысле максимизации экономической выгоды от вырубки леса. Так как число новых деревьев естественным образом зависит от числа уже имеющих взрослых деревьев, то краевое условие, описывающее появление новых деревьев, носит нелокальный характер. Ряд работ [1, 3, 4, 5] рассматривает схожие задачи оптимальной вырубки леса при достаточно общих условиях на функции роста, смертности и появления новых деревьев. В этих работах устанавливаются необходимые условия оптимальности и принципиальная структура оптимального управления.

Модель. В данной работе используется специальный вид функций роста, смертности и появления новых деревьев, основанный на предположении об «идеальной пластичности» деревьев (Perfect Plasticity Approximation — PPA [6, 7]). Таким образом, непрерывная зависимость функций жизнедеятельности деревьев от доступного света, и, следовательно, от плотности окружающих деревьев, заменяется кусочно-постоянной функцией с границей между двумя областями, зависящей от общей плотности деревьев:

$$G(D,N) = \begin{cases} G_c, D \in [0, D^*) \\ G_u, D \in [D^*, \bar{D}) \end{cases}, \mu(D,N) = \begin{cases} \mu_c, D \in [0, D^*) \\ \mu_u, D \in [D^*, \bar{D}) \end{cases},$$

$$F(D,N) = \begin{cases} 0, D \in [0, D^*) \\ F, D \in [D^*, \bar{D}) \end{cases} \tag{1}$$

где $G(D,N), \mu(D,N)$ и $F(D,N)$ — темпы роста, смертности и рождаемости деревьев при данных диаметре дерева $D \geqslant 0$ и плотности деревьев $N = N(D)$; D^* — критический диаметр деревьев, разделяющий области «света» и «тени»; $\bar{D}$ — максимальный размер деревьев; G_c и G_u — постоянные заданные положительные темпы роста деревьев в областях света и тени ($G_c > G_u$), μ_c и μ_u — постоянные заданные положительные темпы смертности деревьев в областях света и тени ($\mu_c < \mu_u$), F — постоянный заданный положительный темп появления новых деревьев от деревьев, находящихся в области света (предполагается, что деревья, находящиеся в тени, в производстве новых деревьев не участвуют). Несмотря на простоту, данная модель показала хорошее соответствие с реальными данными при моделировании леса, не подверженного вырубке [6, 7].

В данной работе рассматривается вырубка деревьев в стационарном состоянии, что, как было показано в [8], является разумным предположением для анализа долгосрочных последствий выборочной вырубки леса. Таким образом, с учетом (1), управляемая система имеет вид

$$G_u \frac{dN_u(D)}{dD} = -(\mu_u + c_u(D))N_u(D) \text{ при } 0 \leqslant D < D^*$$

$$G_c \frac{dN_c(D)}{dD} = -(\mu_c + c_c(D))N_c(D) \text{ при } D^* < D \leqslant \bar{D}, \tag{2}$$

где $c_u(D)$ и $c_c(D)$ — темпы вырубки деревьев диаметра D; $N(D) = N_u(D)$ при $0 \leqslant D < D^*$ и $N(D) = N_c(D)$ при $D^* < D \leqslant \bar{D}$. Дополнительно требуем выполнения условия непрерывности потока через границу

$$\lim_{D \to D^*} G_u N_u(D) = \lim_{D \to D^*} G_c N_c(D) \tag{3}$$

Появление новых деревьев описывается условием

$$G_u N_u(0) = \int_{D^*}^{\bar{D}} F N_c(D) A(D) dD, \tag{4}$$

где $A(D)$ — заданная положительная площадь кроны дерева диаметром D. Критический диаметр D^* определяется через

$$\int_{D^*}^{\bar{D}} A(D) N_c(D) dD = 1,$$

что соответствует тому, что наиболее высокие деревья заполняют все предоставленное им пространство области света. Предполагаем, что оптимальная вырубка леса нацелена на максимизацию функционала

$$J = \int_{0}^{D^*} p(D) c_u(D) N_u(D) dD + \int_{D^*}^{\bar{D}} p(D) c_c(D) N_c(D) dD,$$

где $p(D)$ — чистая удельная прибыль от вырубки деревьев диаметра D. Управления $c_u(\cdot)$ и $c_c(\cdot)$ предполагаются измеримыми функциями на $[0, D^*]$ и $[D^*, \bar{D}]$ соответственно.

Декомпозиция задачи. Пусть $D^* > 0$ и $q > 0$. Пусть $c_c^*(\cdot|q, D^*)$ и $N_c^*(\cdot|q, D^*), y^*(\cdot|q, D^*)$ — оптимальные управление и траектория в задаче

$$J_c = \int_{D^*}^{\bar{D}} p(D) c_c(D) N_c(D) dD \to \max_{c_c(\cdot)} \tag{7}$$

$$G_c \frac{dN_c(D)}{dD} = -(\mu_c + c_c(D))N_c(D), N_c(D^*) = \frac{G_u}{G_c} q$$

$$\frac{dy(D)}{dD} = -A(D)N_c(D), y(D^*) = 1, y(\bar{D}) = 0$$

$$c_c(D) \in [0, \bar{c}] \ (D \in [D^*, \bar{D}]),$$

а $c_u^*(\cdot|q, D^*)$ и $N_u^*(\cdot|q, D^*)$ — оптимальные управление и траектория в задаче

$$J_u = \int\limits_0^{D^*} p(D)c_u(D)N_u(D)dD \to \max_{c_u(\cdot)} \tag{8}$$

$$G_u \frac{dN_u(D)}{dD} = -(\mu_u + c_u(D))N_u(D), N_u(0) = \frac{F}{G_u}, N_u(D^*) = q$$

$$c_u(D) \in [0, \bar{c}] \ (D \in [0, D^*]).$$

Тогда оптимальные управления $c_u^*(\cdot), c_c^*(\cdot)$ и траектории $N_u^*(\cdot), N_c^*(\cdot)$ находятся из

$$c_u^*(D) = c_u^*(D|q, D^{**}), N_u^*(D) = N_u^*(D|q, D^{**}) \ (D \in [0, D^*))$$

$$c_c^*(D) = c_c^*(D|q, D^{**}), N_c^*(D) = N_c^*(D|q, D^{**}) \ (D \in (D^*, \bar{D}]),$$

где

$$(q^*, D^{**}) = \mathrm{Arg} \max_{q \geqslant 0, D^* \in [0, \bar{D}]} J(q, D^*),$$

$$J(q, D^*) = \int\limits_0^{D^*} p(D)c_u(D|q, D^*)N_u(D|q, D^*)dD +$$
$$+ \int\limits_{D^*}^{\bar{D}} p(D)c_c(D|q, D^*)N_c(D|q, D^*)dD.$$

Решение задач (7) и (8) находится из принципа максимума Понтрягина.

Литература

1. G. Feichtinger, G. Tragler, V. M. Veliov (2003): Optimality conditions for age-structured control systems, J. Math. Anal. Appl. 288, 47–68.
2. Z-R. He (2005): Optimal birth control of age-dependent competitive species II. Free horizon problems, J. Math. Anal. Appl. 305, 11–28.
3. N. Hritonenko, Y. Yatsenko, R.-U. Goetz, A. Xabadia (2008): Maximum principle for a size-structured model of forest and carbon sequestration management, Applied Mathematics Letters 21, 1090–1094.
4. R.-U. Goetz, A. Xabardia, E. Calvo (2011): Optimal Forest Management in the Presence of Intraspecific Competition, Mathematical Population Studies, 18, 3.
5. A. A. Davydov, A. S. Platov (2014): Optimal stationary solution for a model of exploitation of a population under intraspecific competition. Journal of Mathematical Sciences, 201 (6). 746-750.
6. N. Strigul, D. Pristinski, D. Purves, J. Dushoff, S. Pacala (2008): Scaling from trees to forests: Tractable macroscopic equations for forest dynamics. Ecol Monogr. 78: 523-545.
7. D. W. Purves, J. W. Lichstein, N. Strigul, S.W. Pacala (2008): Predicting and understanding forest dynamics using a simple tractable model. Proc Natl Acad Sci USA. 105: 17018-17022.
8. O. Tahvonen (2004): Timber production versus old-growth preservation with endogenous prices and forest age-classes. Can J For Res. 34: 1296-1310.

ДВУХСЕКТОРНАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКО РОСТА И СВЯЗАННОГО С НИМ КАЧЕСТВА ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

TWO-SECTOR MODEL OF ECONOMIC GROWTH AND RELATED ENVIRONMENTAL QUALITY

Ровенская Е.А., Орлов С.М.

International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria
ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва , Россия

rovenska@iiasa.ac.at, sergey.orlov@cs.msu.su

В работах [1,2] рассматривались односекторные модели экономического роста с различными производственными функциями. В этих моделях качество окружающей среды обратно пропорционально объёму производства с некоторой эластичностью. Задача оптимального управления состояла в максимизации функционала, который учитывал потребление и качество окружающей среды.

В докладе рассматривается двухсекторная модель экономического роста, в которой представлены два типа производства: с технологией, которая загрязняет окружающую среду, («грязная» технология) и с технологией, которая безвредна для окружающей среды («чистая» технология). Качество окружающей среды обратно пропорционально объёму производства с помощью «грязной» технологии с некоторой эластичностью. Задача оптимального управления рассматривается с функционалом, который включает потребление, а также дополнительно стимулирует выработку продукта с использованием «чистой» технологии.

Задача оптимального управления исследуется при помощи принципа максимума Понтрягина. В задаче находится особый режим, который оказывается оптимальным в случае, если фазовое состояние в начальный момент времени принадлежит особому множеству, если же начальное состояние лежит за пределами особого множества, в этом случае предложен алгоритм численного решения краевой задачи специального вида, позволяющий отыскать как оптимальное управление и траекторию, так и длительность начального режима управления. Оптимальность указанных решений обосновывается с использованием методологии доказательства теоремы о достаточных условиях оптимальности в терминах конструкций принципа максимума, изложенной в [3].

Литература

1. Ровенская Е.А., “Односекторная модель экономического роста с нелинейной производственной функцией и связанного с ним качества окружающей среды,” *Математическая Теория Игр и её Приложения*, 4, No. 4, 73—92 (2012).
2. Ровенская Е.А., “Модель экономического роста и связанного с ним качества окружающей среды,” *Математическая Теория Игр и её Приложения*, 3, No. 3, 67—84 (2011).
3. Киселёв Ю.Н., “Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина,” *Математические модели в экономике и биологии. Материалы научного семинара. Планерное Москов. обл.*, МАКС Пресс Москва, 57—67 (2003).

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ, РЕШАЮЩИЕ НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

NUMERICAL METHODS FOR SOLVING SOME OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH A GIVEN ACCURACY

Самсонов С.П.

Факультет ВМК МГУ, Москва, Россия

samsonov@cs.msu.su

Доклад посвящен рассмотрению численных методов решения линейных задач оптимального управления. Именно для линейных задач численные методы, как правило, удается строго обосновать, то есть доказать их сходимость и установить оценки погрешности. Использование линейности управляемой системы позволяет построить эффективно работающие численные алгоритмы. Разработке численных методов для линейных задач оптимального управления посвящен целый ряд работ. Следует однако заметить, что в большинстве опубликованных работ исследуется только сходимость методов и задается какой-то критерий остановки вычислений, который обеспечивает "близость"вычисляемых величин к искомым, но не гарантирует заданной точности. Обычно используемые численные алгоритмы требуют численного решения некоторых задач из теории дифференциальных уравнений, линейной алгебры и т.д. Однако вычислительные погрешности решения этих вспомогательных задач могут оказаться весьма значительными, поэтому большой интерес представляют такие численные методы, для которых удается получать оценку точности вычислений с учетом вычислительных погрешностей. Данный доклад как раз и посвящен численным методам, решающим линейные задачи оптимального управления с заданной точностью и с учетом вычислительных погрешностей, см. [1-4]

Литература

1. Самсонов С. П. Оценка погрешности времени быстродействия в линейной задачи оптимального управления // Проблемы динамического управления. Вып. 5. М.: МАКС Пресс, 2010. С. 123–132.
2. Самсонов С. П. Восстановление выпуклого множества по его опорной функции с заданной точностью // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1983. № 3. С. 68–71.
3. Самсонов С. П. Численный метод решения линейных задач оптимального управления с заданной точностью // Проблемы динамического управления. Вып. 4. М.: МАКС Пресс, 2009. С. 156–158.

4. Самсонов С. П. Восстановление выпуклого множества по его опорной функции с заданной точностью // Тр. МИАН СССР им. В.А.Стеклова. 1988. Т.185. С. 215–221.

ОБ УСЛОВИЯХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРАВИЛЬНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ON CONDITIONS OF STATISTICAL REGULARITY FOR DYNAMICAL SYSTEMS

Степин А.М.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет

ststepin@mail.ru

Доклад представляет собой краткое изложение новых результатов об асимптотическом поведении (при $t \to \infty$) фундаментальной матрицы уравнения в вариациях для автономных динамических систем с интегральным инвариантом и, более обще, линейных расширений динамических систем с конечной инвариантной мерой.

Это направление исследований сформировалось под влиянием результатов А.М.Ляпунова о характеристических показателях дифференциальных уравнений и работ Я.Г.Синая, относящихся к энтропийной теории классических динамических систем. Применительно к гладким динамическим системам основной вопрос в этом направлении таков: насколько правильно ведет себя (при $t \to \infty$) коэффициент растяжения $\lambda_t(x)$ касательного (в точке x фазового пространства) вектора v под действием дифференциала $(dT^t)_x$ фазового отображения за время t; например, существует ли точный показатель $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}\ln\lambda_t(x)$. Динамическую систему называют правильной, если существуют точные показатели всех коэффициентов растяжения для п.в. x относительно нормированной инвариантной меры μ.

В 1968 - начале 1969 г.г. В.М. Миллионщиковым и В.И. Оселедцем были опубликованы работы [1] и [2], содержащие (полученные независимо) ответы на вопрос о статистической правильности динамических систем. Первый автор работал в контексте дифференциальных уравнений, второй — в более общем контексте измеримых потоков и их линейных расширений. Линейное расширение потока $F^t : X \to X$ это динамическая система на $X \times \mathbb{R}^m$ вида

$$(x,v) \mapsto (F^t x, A(t,x)v),$$

где A — функция на $\mathbb{R}\times X$ со значениями в $m\times m$-матрицах. Для потоков с конечной инвариантной мерой μ В.И.Оселедец показал, что в предположении

$$\sup_{|t|\leqslant 1} \ln^+ \|A(t,x)\| \in L^1(X,\mu) \qquad (*)$$

μ-п.в. существуют точные показатели Ляпунова во всех k-мерных направлениях; за этим утверждением закрепилось название — мультипликативная эргодическая теорема (МЭТ). Основная идея ее доказательства заключалась в сведении к эргодической теореме Биркгофа; при этом оставалось неизвестным, можно ли заменить условие $(*)$ на μ-суммируемость функции $\log\|A(t,x)\|$ при каждом t. Все применения МЭТ в теории динамических систем и в спектральной теории операторов [3], а также обобщения этой теоремы на случай нелинейных и бесконечномерных расширений динамических систем предполагают выполнение условия $(*)$ или соответствующих его аналогов.

Новое в обсуждаемой тематике начну с ответа на вопрос, поставленный в [2]: существует ли такой измеримый аддитивный коцикл [1] $\alpha(t,x)$, для которого $\alpha(t,\cdot)\in L^1(X,\mu)$ и неверно заключение теоремы Биркгофа о сходимости отношения $t^{-1}\alpha(t,x)$ μ-п.в.

Предложение *Для любого эргодического потока $\{F^t\}$ на пространстве X с конечной мерой μ найдется измеримый аддитивный коцикл $\alpha : \mathbb{R}\times X \to \mathbb{R}$, такой, что $\alpha(t,\cdot)\in L^1(X,\mu)$ для каждого t и μ-п.в. не существует $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}\alpha(t,x)$.*

Такой коцикл строится явно и это позволяет обнаружить, что отношение $t^{-1}\alpha(t,x)$ имеет предел, если $t\to\infty$ по некоторому множеству плотности 1. Последнее обстоятельство приводит к новой версии мультипликативной эргодической теоремы для коциклов с μ-интегрируемым логарифмом нормы при каждом $t\in\mathbb{R}$.

Теорема 1 *Пусть для коцикла $A : \mathbb{R}\times X \to GL(m,\mathbb{R})$, ассоциированного с потоком $\{F^t\}$ в пространстве $(X,\mu), \mu(X)=1$, функция $\ln^+\|A(t,x)\|$ μ-интегрируема при каждом $t\in\mathbb{R}$. Тогда найдется $\{F^t\}$-инвариантное подмножество $\widetilde{X}\subset X$ полной меры и измеримая функция $x\mapsto\tau(x)$, принимающая значения в*

[1] Термин "аддитивный коцикл"означает, что функция $\alpha(t,x)$ удовлетворяет уравнению $\alpha(t,x) = \alpha(t,F^s x)+\alpha(s,x)$.

классе борелевских подмножеств $\mathbb{R}$ *плотности* 1*, такие, что для* μ*-п.в.* $x \in \widetilde{X}$*:*

(i) *существует предел* $\lim\limits_{\tau(x)\ni t\to\infty} (A^*(t,x)A(t,x))^{1/2t} =: \Lambda(x)$*,*

(ii) *существуют такие подпространства* $U_i(x) \subset \mathbb{R}^m$*, что*

$$\mathbb{R}^m = \oplus_{i=1}^{k(x)} U_i(x), \quad U_i(F^t x) = A(t,x)U_i(x),$$

$$\lim_{\tau(x)\ni t\to\pm\infty} |t|^{-1} \ln \|A(t,x)v\| \, = \, \pm\, \chi_i(x)$$

равномерно по $v \in U_i(x) \setminus \{0\}$*; при этом функции* $x \mapsto k(x)$*,* $x \mapsto d_i(x) := \dim U_i(x)$ *и* $x \mapsto \chi_i(x)$ $\{F^t\}$*-инвариантны, а* $\{(e^{\chi_i(x)}, d_i(x))\}$ *есть спектр матрицы* $\Lambda(x)$*.*

Доказательство этой версии МЭТ основано на варианте субаддитивной эргодической теоремы, использующей сходимость при $t \to \infty$ по множествам плотности 1.

Теорема 2 *Пусть* $\alpha : \mathbb{R}_+ \times X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *такая измеримая функция, что* $\alpha^+(t,x) \in L^1(X,\mu)$ *при каждом* t *и для всех* $s,t \in \mathbb{R}, x \in X$*, выполнено неравенство* $\alpha(t+s,x) \leqslant \alpha(t,x) + \alpha(s,F^t x)$*. Тогда существуют измеримая функция* $x \mapsto \tau(x)$ *со значениями в семействе борелевских подмножеств* $\mathbb{R}$ *плотности* 1 *и измеримая* $\{F^t\}$*-инвариантная функция* $\beta : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$*, такие, что* $\beta^+ \in L^1$*,*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1} \int \alpha(t,x)\, d\mu \, = \, \inf_t \, t^{-1} \int \alpha(t,x)\, d\mu \, = \, \int \beta(x)\, d\mu$$

и μ*-п.в.* $\lim\limits_{\tau(x)\ni t\to\infty} t^{-1}\alpha(t,x) \, = \, \beta(x)$*.*

Изложенное понимание асимптотического (при $t \to \infty$) поведения линейных расширений динамических систем с инвариантной мерой приводит к новым задачам, возможным обобщениям и приложениям. Результаты получены совместно с М.Е.Липатовым, сотрудником кафедры теории динамических систем механико-математического факультета МГУ.

Литература

1. Миллионщиков В.М. Критерий устойчивости вероятного спектра линейных систем дифференциальных уравнений с рекуррентными коэффициентами и критерий почти-приводимости систем с почти-периодическими коэффициентами, Матем. сб., 1969, т.78, №2, 79-201.

2. Оселедец В.И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем, Тр. ММО, 1968, т.19, 179-210.
3. Латушкин Ю.Д., Степин А.М. Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем, УМН, 1992, т.47, вып.3, 9-74.
4. Липатов М.Е., Степин А.М. Мультипликативная эргодическая теорема для коциклов, удовлетворяющих условию $\ln \|A(t,\cdot)\| \in L^1$, Деп. в ВИНИТИ 30.05.2016, № 75-В2016.

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ

THE METHOD OF CHARACTERISTICS TO IDENTIFICATION PROBLEMS

Субботина Н.Н.

Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, Россия
Уральский федеральный университет им. Первого Президента РФ Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

subb@uran.ru

Рассмотрены математические модели динамических систем, которые описываютя системами обыкновенныхм дифференциальных уравнений, линейных относительно неизвестных постоянных параметров и нелинейных относительно фазовых переменных. Предложен новый метод решения задачи идентификации параметров.

Обсуждается метод решения задачи идентификации неизвестных параметров по известной истории неточных измерений реализовавшихся фазовых переменных. Основой метода является метод характеристик для уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана во вспомогательной задаче оптимального управления. Роль управлений играют неизвестные коэффициенты. В качестве функционала платы рассматривается интегральная квадратичная невязка между фазовыми переменными и известными неточными замерами реализовавшейся (базовой) траектории модели. В интеграл добавлена регуляризирующая добавка в виде квадрата евклидовой нормы вектора-управления с малым параметром-коэффициентом. Целью управления при заданной истории замеров на некотором отрезке времени является перевод системы из малой окрестности начального замера в точку конечного замера и минимизации при этом функционала платы.

Экстремальные управления [1], порождающие движения по фазовым характеристикам уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, которые приходят в малую окрестность начального замера и доставляют минимум функционалу платы среди всех таких движений модели, усредняются по отрезку времени, на котором известна история замеров. Замыкание множества всевозможных пределов усреднений экстремальных управлений при согласованном стремлении к нулю параметра неточности измерений и параметра регуляризации функционала платы, является решением задачи идентификации.

Ключевым элементом данной конструкции, доставляющим ей устойчивость по отношению к возмущениям входных данных задачи управления, является использование отрицательной невязки в функционале платы.[2] Этот прием позволяет получить характеристическую систему, у которой фазовые и импульсные компоненты решения имеют не экспоненциальный, а колебательный характер. Причем амплитуда колебания невязки стремится к нулю при стремлении к нулю параметра регуляризации.

Предлагаемый метод отрицательной невязки близок подходу, предложенному и развитому в работах Ю.С. Осипова и его учеников[3], в которых обратные задачи динамики решаются с помощью позиционного управления в форме экстремального прицеливания[4].

На базе предложенного метода отрицательной невязки разработан численный алгоритм. Приводятся результаты численного решения задачи идентификации 3-х неизвестных параметров для макроэкономической модели, описываемой двумя дифференциальными уравнениями, существенно нелинейгыми по фазовым переменным.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00168) и Программы Президиума РАН "Математические задачи современной теории управления"(проект № 0387-2015-0059).

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, (1961).
2. N. N. Subbotina, T. B. Tokmantsev, E. A. Krupennikov. “On the Solution of Inverse Problems of Dynamics of Linearly Controlled Systems by the Negative Discrepancy Method,”*Tr. Mat. Inst. Steklova*, 291, 266–275, (2015).

3. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. “Some Algorithms for the Dynamic Reconstruction of Inputs“, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 275. Suppl. 1, 86-120 (2011).
4. Krasovsky N.N., Subbotin A.I. *Game-Theoretical Control Problems.* Springer-Verlag (1987).

О НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ ПРИНЦИПАХ ТЕОРИИ ЭКСТРЕМУМА

ON SOME GENERAL PRINCIPLES OF THE EXTREMUM THEORY

Тихомиров В.М.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

В докладе будет рассказано о принципе Лагранжа, касающемся необходимых условий экстремума, принципе Гамильтона, связанном с устойчивостью решений и достаточных условиях, принципе двойственности выпуклой оптимизации и принципах существования решений.

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ О СБЛИЖЕНИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

ON SOLUTIONS OF APPROACHING PROBLEMS FOR CONTROLLED SYSTEMS ON A FINITE TIME INTERVAL

Ушаков В.Н., Тарасьев А.М., Ушаков А.В.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, РФ

ushak@imm.uran.ru

Ухоботов В.И.

Челябинский гос. университет, Челябинск, РФ

ukh@csu.ru

В докладе рассматриваются задачи о сближении управляемых систем в конечномерном евклидовом пространстве на конечном промежутке времени. Эти задачи и более общие игровые задачи о сближении изучались в работах [1–11]. Основу одного из наиболее известных подходов к решению задач о сближении составляет теория, базирующаяся на применении принципа максимума Л.С. Понтрягина [2]. В настоящем докладе представлен подход, основанный на построении решений задач о сближении с использованием множеств разрешимости [3–7]. Конструирование самих множеств разрешимости W в различных задачах о сближении, в том числе, игровых задачах, тесно связанно с конструированием множеств достижимости и интегральных воронок управляемых систем. Из-за сложности рассматриваемых задач вопрос о точном конструировании множеств W отступает на второй план, а на переднем плане стоит вопрос о приближенном конструировании множеств W и разрешающих управлений. Некоторые схемы такого конструирования предложены в [10, 11]. В докладе приведены примеры моделирования задач о сближении управляемых механических систем.

Задачи о сближении на конечном промежутке времени. На промежутке $[t_0, \vartheta], t_0 < \vartheta < \infty$ задана система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u); \qquad (1)$$

здесь t — время, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $u \in P \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ — вектор управления, $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ — пространство компактов в $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа.

Предполагается, что выполнены условия.

A. Вектор функция $f(t, x, u)$ ограничена и непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P$ и для любой ограниченной замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ найдется такая константа $L = L(D) \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x_*, u) - f(t, x^*, u)\| \leqslant L\|x_* - x^*\|, (t, x_*) \text{ и } (t, x^*) \text{ из } D, u \in P,$$

где $\|f\|$ — норма вектора f в евклидовом пространстве.

B. Существует такая константа $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u)\| \leqslant \gamma(1 + \|x\|), (t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P.$$

C. $F(t, x) = \{f(t, x, u) \colon u \in P\}$ — выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ при $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Наряду с системой (1) задан компакт M в $\mathbb{R}^n$ — целевое множество для (1).

Рассматриваются следующие задачи о сближении системы (1) с M.

Задачи о сближении системы (1) с M в момент ϑ. Задача 1.1. Требуется выделить в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ множество W всех позиций (t_*, x_*) системы (1), для которых существуют допустимые управления $u(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, приводящие систему (1) в момент ϑ на M: $x(\vartheta) \in M$.

Задача 1.2. Пусть $(t_0, x^{(0)}) \in W$. Требуется построить допустимое управление $u^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, порождающее движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x^{(0)}$) системы (1), для которого $x(\vartheta) \in M$.

Задачи о сближении системы (1) с M к моменту ϑ

Задача 2.1. Требуется выделить в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ множество W всех позиций (t_*, x_*) системы (1), для которых существуют допустимые управления $u(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, приводящие систему (1) на M не позже момента ϑ.

Задача 2.2. Пусть $(t_0, x^{(0)}) \in W$. Требуется построить допустимое управление $u^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, порождающее движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x^{(0)}$) системы (1), приходящее на M в момент $t^* \in [t_0, \vartheta]$.

В [10, 11] представлены попятные пошаговые (по времени) схемы приближенного вычисления сечений $W_i = W(t_i) = \{w \in \mathbb{R}^n\colon (t_i, w) \in W\}$, $t_i \in \Gamma$, где $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_N = \vartheta\}$ — разбиение промежутка $[t_0, \vartheta]$. Сечения $W_i, i = N, N-1, \ldots, 0$ строятся по шагам как конечные множества $\mathcal{W}_i$ в $\mathbb{R}^n$.

Разрешающее управление $u^*(t), t \in [t_0, \vartheta]$ для точек $x^{(0)} \in \mathcal{W}_0$ строятся как кусочно-постоянные вектор–функции, отвечающие промежутку $[t_0, \vartheta]$.

В докладе рассмотрены примеры моделирования задач управления механическими системами.

Работа была выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-31-00356-мол_а) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математические задачи современной теории управления», проект «Позиционные дифференциальные игры, уравнения Гамильтона-Якоби и их приложения».

Литература

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И., *Позиционные дифференциальные игры*, М.: Наука, (1974).
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Ю.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*, М.: Физматлит, (1961).
3. Осипов Ю.С., “Альтернатива в дифференциально–разностной игре,” *Докл. АН СССР.*, 197, No. 5, 619-624 (1971).
4. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С., “Об одном алгоритмическом критерии разрешимости игровых задач для линейных управляемых систем,” *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 6, No. 1, 2–10 (2000).

5. Куржанский А.Б., “Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений,” *Труды МИАН*, 224, 234–248 (1999).
6. Куржанский А.Б., *Избранные труда А.Б. Куржанского*, М.: изд-во МГУ, (2009).
7. Никольский М.С., “Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина,” // *Мат. сб.*, 116, No. 1, 136-144 (1981).
8. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А., *Игровые задачи управления и поиска*, М.: Наука, (1978).
9. Половинкин Е.С., “Стабильность терминального множества и оптимальность времени преследования в дифференциальных играх,” *Диф. уравнения*, 20, No. 3, 433–446 (1984).
10. Ушаков В.Н., Ухоботов В.И., Ушаков А.В., Паршиков Г.В., “К решеннию задач о сближении управляемых систем,” *Труды МИАН*, 291, 276–291 (2015).
11. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р. “К решению задач управления нелинейными системами на конечном промежутке времени,” *Известия Института математики и информатики УдГУ*, 2 (46), 202–216 (2015).

МЕТОД ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ И ЗАДАЧА УКЛОНЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ЧИСЛО ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ ФОРМИРУЕМОГО УПРАВЛЕНИЯ

THE PROGRAMMED ITERATIONS METHOD AND EVASION PROBLEM WITH CONSTRAINTS ON THE NUMBER OF CONTROL SWITCHINGS

Ченцов А.Г.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

chentsov@imm.uran.ru

1. Теорема об альтернативе Н.Н. Красовского и А.И. Субботина (см. [1, 2]) определила облик современной теории дифференциальных игр (ДИ): было установлено существование седловой точки в надлежащих классах позиционных стратегий, построены методы решения ДИ с использованием программных конструкций, разработаны численные методы; важный результат, распространяющий альтернативу Н.Н. Красовского, А.И. Субботина на случай систем, не удовлетворяющих условию Липшица по фазовой переменной, был получен А.В. Кряжимским [3].

Теорема об альтернативе определяет разбиение пространства позиций в дизъюнктную сумму двух подмножеств (п/м), являющихся множествами успешной разрешимости задач сближения и уклонения игроками I и II соответственно (подробнее см. в [2]); условимся называть это разбиение альтернативным. Одним из способов построения альтернативного разбиения является вариант [4] метода программных итераций (МПИ). В [5, § 11] была предложена модификация этого варианта, имеющая смысл "итераций стабильности", которая и будет рассматриваться в докладе. Заметим, что в монографии [6] (см. [6, гл. IV,V]) был подведён определённый итог ранних исследований по МПИ. Конструкции МПИ для абстрактных динамических систем рассматривались, в частности, в [7, гл. 6].

Оказалось (см. [8, теорема 5.2]), что версия МПИ [5, § 11], восходящая к [4], не только доставляет альтернативное разбиение "в пределе", но и на каждом этапе итераций определяет множество успешной разрешимости игрока II в условиях, когда ограничено число переключений формируемого им управления. Используемые при этом процедуры управления игрока II допускают естественную аналогию с применяемым в инженерных задачах способом управления "по функционалу". Обсуждению данной возможности посвящён настоящий доклад.

2. Рассмотрим конфликтно-управляемую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \ v \in Q \tag{1}$$

(P и Q — непустые конечномерные компакты), функционирующую на промежутке $T \overset{\triangle}{=} [t_o, \vartheta_o]$, $t_o < \vartheta_o$, в n-мерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (относительно (1) полагаются выполненными условия обобщённой единственности и равномерной ограниченности траекторий, подобные используемым в [3]). Полоса позиций $T \times \mathbb{R}^n$ оснащается двумя топологиями: 1) топологией покоординатной сходимости $\mathcal{T}$; 2) топологией $\tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ произведения отрезка T в дискретной топологии τ_∂ (семейство всех п/м T) и обычной нормируемой топологии $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ пространства $\mathbb{R}^n$. Ясно, что $\mathcal{T} \subset \tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$. Через $\mathcal{F}$ и $\mathfrak{F}$ обозначаем семейства всех п/м $T \times \mathbb{R}^n$, замкнутых в $(T \times \mathbb{R}^n, \mathcal{T})$ и $(T \times \mathbb{R}^n, \tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ соответственно. Пусть $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$; M — целевое множество игрока I, распоряжающегося выбором $u \in P$, а N определяет его фазовые ограничения (ФО) в виде системы сечений

$$N\langle t \rangle \overset{\triangle}{=} \{x \in \mathbb{R}^n | \, (t, x) \in N\}, \ t \in T.$$

Цель игрока II состоит в уклонении: встреча с M допускается только после выхода за пределы N. Если $(t_*, x_*) \in N$, то игрок II формирует своё управление на $[t_*, \vartheta_o]$ в виде склейки k констант $v_1 \in Q, \dots, v_k \in Q$, где $k \in \mathbb{N} \overset{\triangle}{=} \{1; 2; \dots,\}$ и при этом $k \leqslant s$ ($s \in \mathbb{N}$ задано). Он стремится при $t_* \in T$ создать траекторию $x(\cdot) = \big(x(t) \in \mathbb{R}^n, t_* \leqslant t \leqslant \vartheta_o\big)$ со следующим свойством: $\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$

$$\Big(\big(\vartheta, x(\vartheta)\big) \in M\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, t \in [t_*, \vartheta[: \big(t, x(t)\big) \notin N\Big); \tag{2}$$

более того, он стремится к строгому уклонению, то есть к осуществлению (2) с некоторым "запасом" (имеется в виду использование вместо M и N некоторых окрестностей этих множеств). Здесь s выступает в качестве параметра, определяющего s-ограничение на выбор управления $v(\cdot) = \big(v(t) \in Q,\ t_* \leqslant t \leqslant \vartheta_o\big)$. Упомянутые выше векторные константы $v_1, \dots, v_k$ игрок II может формировать, используя принцип обратной связи. Моменты переключения данных констант разрешается формировать на основе неупреждающих правил слежения за реализующейся траекторией процесса (см. [8, § 2]). Требуется определить множество всех позиций $(t_*, x_*) \in N$, для которых вышеупомянутая задача, связанная с (2), успешно разрешима.

Основной результат состоит в том, что множество успешной разрешимости вышеупомянутой задачи уклонения определяется в виде $N \setminus \mathcal{W}_s$, где $\mathcal{W}_s$ есть множество из $\mathfrak{F}$, определяемое на s-м этапе итерационной процедуры [5, § 11] (см. также [6, гл. V, § 4]). Структура разрешающей стратегии игрока II полностью определяется при этом множествами-итерациями $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_s$ (как показывают примеры, использование неупреждающих правил слежения за траекторией существенно). Если $(t^*, x^*) \in N \setminus \mathcal{W}$, где $\mathcal{W}$ — предел итерационной процедуры, то в качестве $s \in \mathbb{N}$ можно выбрать наименьшее натуральное число r, для которого $(t^*, x^*) \in N \setminus \mathcal{W}_r$, с тем, чтобы оказалось возможным гарантированно осуществить уклонение с максимальной экономией ресурса переключений.

Литература

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. “Альтернатива для игровой задачи сближения,” Прикл. математика и механика, Т. 34, No. 6, 1005-1022 (1970).
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры, М.: Наука, (1974).
3. Кряжимский А.В. “К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения,” ДАН СССР, 239, No 4, 779-782 (1978).
4. Ченцов А.Г. “К игровой задаче наведения,” ДАН СССР, 226, No. 1. 73-76 (1976).

5. Ченцов А.Г. “Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения,” ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, деп. в ВИНИТИ, No. 1933-79 (1979).
6. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления, М.: Наука, (1981).
7. Chentsov A.G., Morina S.I. Extensions and relaxations, Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., (2002).
8. Ченцов А.Г. “О задаче управления с ограниченным числом переключений,” УПИ им. С.М. Кирова. Свердловск, деп. в ВИНИТИ, No. 4942-В 87 (1987).

Научное издание

Международная конференция
“Динамические системы: обратные задачи, устойчивость
и процессы управления”, посвященная восьмидесятилетию
академика Ю.С. Осипова,
Москва, 22–23 сентября 2016 г.: Тезисы докладов.

Подписано к печати 19.09.2016
Тираж 100 экз.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
119991, Москва, ул. Губкина, 8

ISBN 978-5-98419-071-8

9 785984 190718 >